京都大学　1976年　入学試験　文系数学　問題6

問題

曲線 $y=\alpha x^3-\beta x$（$\alpha\neq 0$）の上にある2点P，Qにおいて，この曲線の接線がいずれも線分PQと垂直になっているという．

1. このような2点P，Qは原点に関して対称な位置にあることを示せ．
2. また，このような2点P，Qがあるためには (α,β) はどのような範囲になければならないか．

解答

Pの座標を (x_1,y_1)
Qの座標を (x_2,y_2)
$f(x)=\alpha x^3-\beta x$
とする。
1.
点PQそれぞれの点の接線の傾きは
$f'(x_1),f'(x_2)$
となる。
このとき1本の線分PQに対してこれらの接線が垂直であることから、この接線は平行
したがって、この二つの接線は傾きが等しい必要がある。
よって、$f'(x_1)=f'(x_2)$
$f'(x)=3\alpha x^2-\beta$ であるので $f'(x_1)=f'(x_2)$ より

$$\begin{aligned}3\alpha {x_1}^2-\beta&=3\alpha {x_2}^2-\beta\\ \alpha {x_1}^2&=\alpha {x_2}^2\end{aligned}$$

$\alpha\neq 0$ より
$x_1=\pm x_2$
線分PQが存在するためには、P、Qはことなる必要があるので $x_1\neq x_2$ または $y_1\neq y_2$
しかし、y は x によって一意に定まるので、$x_1=x_2$ ならば $y_1=y_2$
よって、$x_1\neq x_2$ が必要。
したがって、$x_1=-x_2$
$y_2=\alpha {x_2}^3-\beta x_2=-\alpha {x_1}^3+\beta x_1$ より $y_1=-y_2$
以上より、P,Qは原点に対して対称の位置にある。

2.
$x_1\neq x_2$ より線分PQは y 軸に平行ではない
よって線分PQをあらわす式を $y=ax+b$ とすることができる。
この直線は、P、Qを通るので
$y_1=ax_1+b$
$y_2=ax_2+b$
を満たす。
よって、a を求めると

$y_1 = ax_1 + b$

$y_2 = ax_2 + b$

$a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

このとき、P における接線と平行なベクトル $(1, 3\alpha {x_1}^2 - \beta)$ と

PQ と平行なベクトル $(1, \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2})$ が直交することから

内積が 0

よって $1 + \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(\alpha {x_1}^2 - \beta) = 0$

$x_2 = -x_1$、$y_2 = -y_1$、$y_1 = \alpha {x_1}^3 - \beta x_1$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(\alpha {x_1}^2 - \beta) + 1 &= 0 \\
\frac{2y_1}{2x_1}(3\alpha {x_1}^2 - \beta) + 1 &= 0 \\
\frac{\alpha {x_1}^3 - \beta x_1}{x_1}(3\alpha {x_1}^2 - \beta) + 1 &= 0 \\
(\alpha {x_1}^2 - \beta)(3\alpha {x_1}^2 - \beta) + 1 &= 0 \\
3\alpha^2 {x_1}^4 - 4\alpha\beta {x_1}^2 + \beta^2 + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

この方程式が、0 でない実数解を持つことが必要なので

$X = {x_1}^2$ とおいたとき、

x_1 が実数であれば、X は正の実数なので

$3\alpha^2 X^2 - 4\alpha\beta X + \beta^2 + 1 = 0$

が正の実数解を持つことが必要。

この方程式の解は

$X = \dfrac{2\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 3}}{3\alpha}$

なので

実数であるためには

$\beta^2 - 3 \geqq 0 \quad \to \quad |\beta| \geqq \sqrt{3}$ が必要

$\alpha > 0$ ならば

正の解を持つためには $\sqrt{\beta^2 - 3} > 0$ なので

$2\beta + \sqrt{\beta^2 - 3} > 0$

が必要。

$2\beta > \sqrt{\beta^2 - 3}$ より

$\beta > 0$

よって

$4\beta^2 > \beta^2 - 3$

$\beta^2 > -1$

これは $\beta > 0$ において常に成立する。

よって $\beta > 0$ より $\beta \geqq \sqrt{3}$

$\alpha < 0$ ならば

同様に

$2\beta - \sqrt{\beta^2 - 3} < 0$

$2\beta < \sqrt{\beta^2 - 3}$

$\beta \leqq 0$ なら常に成立するので

$\beta > 0$ の時を考えると

$4\beta^2 < \beta^2 - 3$
$3\beta^2 < -3$
となり成立しない
したがって $\beta \leqq 0$
よって $\beta \leqq -\sqrt{3}$
以上より

P,Q が存在するためには
$\alpha > 0$ のときは $\beta \geqq \sqrt{3}$
$\alpha < 0$ のときは $\beta \leqq -\sqrt{3}$
が必要。
またこの条件のもとでは
X の正の解が存在し、x_1 をその平方根の正の方としたとき、P が確定できて、同時に Q も決まる。
その PQ については条件が成立する。
よってこの条件は十分である。
以上より、
P,Q が存在するためには
$\alpha > 0$ のときは $\beta \geqq \sqrt{3}$
$\alpha < 0$ のときは $\beta \leqq -\sqrt{3}$
が必要十分
よって点 (α, β) は
x 軸の正の部分では、$y \geqq \sqrt{3}$, 負の部分では $y \leqq -\sqrt{3}$ の範囲