京都大学　1976 年　入学試験　理系数学　問題 1

問題

1. 多項式 $f(x) = x^n$ が，区間 $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ において不等式 $|f(x)| < \dfrac{1}{1000}$ をみたすためには，n をどのようにとればよいか.
2. 最高次の係数が 1 である多項式 $g(x)$ で，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において不等式 $|g(x)| < \dfrac{1}{1000}$ をみたし，さらに $10000 < |g(3)| < 100000$ であるようなものの例を 1 つあげよ.

解答

1.

多項式なので、n は正または 0 の整数

$n = 0$ の場合は、$f(x) = 1$ より題意を満たさない。

よって、$n \neq 0$

$n = 1$ の場合 $f(x) = x$ となり、$f(1) = 1$ となり、題意を満たさない。

よって、$n \neq 1$

したがって、$n \geqq 2$

$f(x) = x^n$ より $f'(x) = nx^{n-1}$

n が偶数の時

$n = 2l$ とおく

$x < 0$ の範囲で $f'(x) = nx^{n-1} < 0$

$x > 0$ の範囲で $f'(x) = nx^{n-1} > 0$

よって $f(x)$ は $x < 0$ の範囲で、単調減少、$x > 0$ の範囲で、単調増加

したがって、区間 $\left[-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right]$ では

$x = 0$ において最小となり最小値は $f(0) = 0$

よって $f(x) \geqq 0$ なので、絶対値記号はそのままはずせる。

$x = -\dfrac{1}{2}$ と $x = \dfrac{1}{2}$ のどちらか $f(x)$ の大きい方で最大となるが

$f(-\dfrac{1}{2}) = (-\dfrac{1}{2})^n = (-\dfrac{1}{2})^{2l} = ((-\dfrac{1}{2})^2)^l = ((\dfrac{1}{2})^2)^l = f(\dfrac{1}{2})$

より、$f(-\dfrac{1}{2}) = f(\dfrac{1}{2})$ となり、最大値は $f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2^n}$

この値が $< \dfrac{1}{1000}$ となれば十分

したがって、$\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{1000}$ より $2^n > 1000$

よって、$n > log_2 1000$

$2^{10} = 1024$ より $n \geqq 10$

n が奇数の時

$n = 2l + 1$ とおく

$f'(x) = nx^{n-1} \geqq 0$ より

よって $f(x)$ は単調増加

したがって、区間 $\left[-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right]$ では

$x = -\dfrac{1}{2}$ において最小値をとり

$x=\dfrac{1}{2}$ において最大値を取る。
$f(-\dfrac{1}{2})=(-\dfrac{1}{2})^n=(-\dfrac{1}{2})^{2l+1}=-\dfrac{1}{2}((-\dfrac{1}{2})^2)^l=-f(\dfrac{1}{2})$
より、$f(-\dfrac{1}{2})=-f(\dfrac{1}{2})$ となるので $|f(-\dfrac{1}{2})|=|f(\dfrac{1}{2})|$
よって、$|f(x)|$ の最大値は $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2^n}$
この値が $<\dfrac{1}{1000}$ となれば十分
したがって、$\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{1000}$ より $2^n>1000$
よって、$n>log_2 1000$
$2^{10}=1024$ より $n\geqq 10$ であるが
n が奇数なので $n\geqq 11$
両方の条件を合わせて

$$n\geqq 10$$

2.
1. より
$g(x)=f(x-1/2)=(x-1/2)^n\ (n\geqq 10)$ とすると
最高次数は n でその係数は 1 であるり
$|g(x)|<\dfrac{1}{1000}\ (0\leqq x\leqq 1)$
を満たす。

このとき、$g(3)=(\dfrac{5}{2})^n=\dfrac{5^n}{2^n}$ なので
$10000<|g(3)|<100000$ となれば条件を満たす。

$$\begin{aligned}10000 &< \frac{5^n}{2^n} < 100000\\ 10^4 2^n &< 5^n < 10^5 2^n\\ 5^4 2^{n+4} &< 5^n < 5^5 2^{n+5}\\ 2^{n+4} &< 5^{n-4} < 5\cdot 2^{n+5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^{n+4} &< 5^{n-4}\\ (n+4)\log 2 &< (n-4)\log 5\\ \frac{n+4}{n-4} &< \frac{\log 5}{\log 2}\\ n &> 10.05176637892824\\ n &\geqq 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5^{n-4} &< 5\cdot 2^{n+5}\\ 5^{n-5} &< \cdot 2^{n+5}\\ (n-5)\log 5 &< (n+5)\log 2\\ \frac{n-5}{n+5} &< \frac{\log 2}{\log 5}\\ n &< 12.5647079736603\\ n &\leqq 12\end{aligned}$$

以上より、$n = 11, 12$ であれば、条件を満たす。よって、すくなくとも

$$(x - \frac{1}{2})^{11}$$

が条件を満たす。
実際に $g'(x) = 11(x - \frac{1}{2})^{10} > 0$ より単調増加
よって、最大値は

$$g(1) = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$$

$$g(3) = (\frac{5}{2})^{11} = \frac{48828125}{2048}$$

$$10000 < \frac{48828125}{2048} < 100000$$

$$20480000 < 48828125 < 204800000$$

以上