京都大学　1976 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

1 つの平面内にある，いくつかの 0 でないベクトルからなる集合 S が条件

“$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ が S のベクトルであれば $\dfrac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}$ は整数である”

をみたしているという．ただし，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 等はベクトルの内積をあらわす．

1. S の 2 つのベクトルの間の角は，0°，30°，45°，60°，90° およびこれらの補角のうちの 1 つであることを示せ．
2. (1) において，角が 0°，30°，60° の場合には，2 つのベクトルの長さの比はどうなるか．
3. 30° の角をなすベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を含み，12 個のベクトルからなる集合 S の例を図示し，各ベクトルを $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ であらわせ．

解答

1.

$\boldsymbol{a}=(x_a,y_a)$

$\boldsymbol{b}=(x_b,y_b)$

とすると

$\dfrac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}=\dfrac{2(x_ax_b+y_ay_b)}{{x_b}^2+{y_b}^2}$ これが整数なので

$\dfrac{2(x_ax_b+y_ay_b)}{{x_b}^2+{y_b}^2}=n$ と表せる。

したがって

$2(x_ax_b+y_ay_b)=n({x_b}^2+{y_b}^2)$

$2x_ax_b+2y_ay_b=n{x_b}^2+n{y_b}^2$

$2x_ax_b-n{x_b}^2=n{y_b}^2-2y_ay_b$

$x_b(2x_a-nx_b)=y_b(ny_b-2y_a)$

$x_b(2x_a-nx_b)+y_b(2y_a-ny_b)=0$

$\boldsymbol{c}=(2x_a-nx_b,2y_a-ny_b)$ としたとき

$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$

つまり、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は直交する。

$\boldsymbol{c}=(2x_a-nx_b,2y_a-ny_b)=2\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}$ なので

原点 O から $2\boldsymbol{a}$ を伸ばし、その点を A

A から $\boldsymbol{b}$ と逆向きに $n|\boldsymbol{b}|$ の長さにとった点を C とすると三角形 OAC の角 C は 90° となる。

このとき、角 A$=\theta$ を考えると $\cos\theta=\dfrac{n|b|}{2|a|}$

$\cos^2\theta=\dfrac{n^2|b|^2}{2^2|a|^2}$

$\cos^2\theta=\dfrac{n^2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}{2^2|a|^2}$

$\cos^2\theta=\dfrac{2n(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{2^2|a|^2}$

$\cos^2\theta=\dfrac{n(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$

となるが $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ ともに S の要素なので

仮定より $\dfrac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$ は整数。
したがってこれを m とおくと
$\cos^2\theta = \dfrac{nm}{4}$
m,n ともに整数なので $mn = l$ とすると $\cos\theta = \dfrac{\pm\sqrt{l}}{2}$
$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より
$0 \leqq l \leqq 4$
l は $(0,1,2,3,4)$ のどれかとなるので
$\cos\theta$ は $(-1, \dfrac{-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ となる。
したがって、θ は

$180°, 150°, 135°, 120°, 90°, 60°, 45°, 30°, 0°$ となる。

角 A は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角の錯角なので値は等しい。

よって S の二つのベクトルのなす角は $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ およびその補角となる。

2.

角が $0°, 30°, 60°$ のとき
$\cos\theta = \dfrac{1, \sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}$
よって、$l = 1,3,4$

$mn = 1,3,4$ であるから、$(n,m) = (1,1), (1,3), (3,1), (1,4), (2,2), (4,1)$ の組がある。

$(n,m) = (1,1)$ のとき
$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$
$\cos\theta = \dfrac{|b|}{2|a|}$
より
$\dfrac{|b|}{2|a|} = \dfrac{1}{2}$
$|b| = |a|$

よって、二つのベクトルの長さは等しい

$(n,m) = (1,3)$ のとき
$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta = \dfrac{|b|}{2|a|}$
より
$\dfrac{|b|}{2|a|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$|b| = \sqrt{3}|a|$

よって、二つのベクトルの長さの比は $\sqrt{3}$

$(n,m) = (3,1)$ のとき

同様に $|a| = \sqrt{3}|b|$

よって、二つのベクトルの長さの比は $\sqrt{3}$

$(n,m) = (1,4)$ のとき

$\cos\theta = 1$
$\cos\theta = \dfrac{|b|}{2|a|}$
より

$|b| = 2|a|$

比は 2

$(n,m) = (2,2)$ のとき

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \dfrac{2|b|}{2|a|}$

より

$|a| = \sqrt{2}|b|$

比は $\sqrt{2}$

$(n, m) = (1, 4)$ のとき

同様に

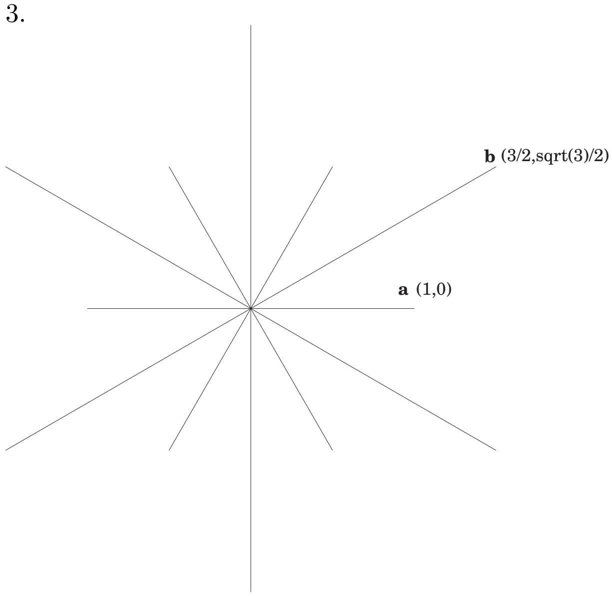
$|a| = 2|b|$

以上より、角が $0°$ のとき長さの比は 2 または$\sqrt{2}$

$30°$ のとき長さの比は $\sqrt{3}$

$60°$ のとき長さは等しい

3.



$S = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{12}\}$ とし

$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a} = (1, 0)$

$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b} = (\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$

とする。

$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}_4 = 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}_6 = \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}_7 = -\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}_8 = -\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}_9 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}_{10} = 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}_{11} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}_{12} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$