京都大学　1976 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

1 つの平面内にある，いくつかの 0 でないベクトルからなる集合 S が条件

“$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ が S のベクトルであれば $\dfrac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}$ は整数である”

をみたしているという．ただし，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 等はベクトルの内積をあらわす．

1. S の 2 つのベクトルの間の角は，$0°$，$30°$，$45°$，$60°$，$90°$ およびこれらの補角のうちの 1 つであることを示せ．
2. (1) において，角が $0°$，$30°$，$60°$ の場合には，2 つのベクトルの長さの比はどうなるか．
3. $30°$ の角をなすベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を含み，12 個のベクトルからなる集合 S の例を図示し，各ベクトルを $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ であらわせ．

解答

1.

$\boldsymbol{a}=(x_a,y_a)$

$\boldsymbol{b}=(x_b,y_b)$

とする

$\dfrac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}$ が整数なので

$\dfrac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}=n$ n は整数

と表せる。

また、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ ともに S の要素なので、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を入れ換えた

$\dfrac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$ も整数でなければならないので

$\dfrac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}=m$ m は整数

と表せる。

$n(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=m(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ となり

$n|\boldsymbol{b}|^2=m|\boldsymbol{a}|^2$ となる

また

余弦定理より

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\cos\theta|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ より

$(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2={x_a}^2+{y_a}^2+{x_b}^2+{y_b}^2-2\cos\theta\sqrt{({x_a}^2+{y_a}^2)({x_b}^2+{y_b}^2)}$

${x_a}^2+{x_b}^2-2x_ax_b+{y_a}^2+{y_b}^2-2y_ay_b={x_a}^2+{y_a}^2+{x_b}^2+{y_b}^2-2\cos\theta\sqrt{({x_a}^2+{y_a}^2)({x_b}^2+{y_b}^2)}$

$-2x_ax_b-2y_ay_b=-2\cos\theta\sqrt{({x_a}^2+{y_a}^2)({x_b}^2+{y_b}^2)}$

$x_ax_b+y_ay_b=\cos\theta\sqrt{({x_a}^2+{y_a}^2)({x_b}^2+{y_b}^2)}$

$\cos\theta=\dfrac{x_ax_b+y_ay_b}{\sqrt{({x_a}^2+{y_a}^2)({x_b}^2+{y_b}^2)}}$

$x_ax_b+y_ay_b=\dfrac{m}{2}({x_a}^2+{y_a}^2)$ より

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{m({x_a}^2+{y_a}^2)}{2\sqrt{({x_a}^2+{y_a}^2)({x_b}^2+{y_b}^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{m^2({x_a}^2+{y_a}^2)^2}{4({x_a}^2+{y_a}^2)({x_b}^2+{y_b}^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{m^2({x_a}^2+{y_a}^2)}{4({x_b}^2+{y_b}^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{m^2|\boldsymbol{a}|^2}{4|\boldsymbol{b}|^2}}
\end{aligned}
$$

$n|\boldsymbol{b}|^2 = m|\boldsymbol{a}|^2$
より

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \sqrt{\frac{mn|\boldsymbol{b}|^2}{4|\boldsymbol{b}|^2}} \\
&= \sqrt{\frac{mn}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{mn}}{2}
\end{aligned}
$$

m, n ともに整数なので $mn = l$ とすると $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{l}}{2}$
$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より
$0 \leqq l \leqq 4$
l は $(0, 1, 2, 3, 4)$ のどれかとなるので
$\cos\theta$ は $(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ となる。
したがって、θ は
$\pm 90^\circ, \pm 60^\circ, \pm 45^\circ, \pm 30^\circ, 0^\circ$ となる。
よって S の二つのベクトルのなす角は $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ およびその補角となる。
2.
角が $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ のとき
$\cos\theta = 1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}$
よって、$l = 1, 3, 4$
$mn = 1, 3, 4$ であるから、$(n, m) = (1,1), (1,3), (3,1), (1,4), (2,2), (4,1)$ の組がある。
$(n, m) = (1, 1)$ のとき
$|\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2$ となり
二つのベクトルの長さは等しい
$(n, m) = (1, 3)$ のとき
$|\boldsymbol{a}|^2 = 3|\boldsymbol{b}|^2$ となり
二つのベクトルの長さの比は $\sqrt{3}$
$(n, m) = (3, 1)$ のとき
同様に二つのベクトルの長さの比は $\sqrt{3}$
$(n, m) = (1, 4)$ のとき
$|\boldsymbol{a}|^2 = 4|\boldsymbol{b}|^2$ となり
比は 2
$(n, m) = (2, 2)$ のとき

$|\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2$ となり

比は 1

$(n, m) = (1, 4)$ のとき

同様に

比は 2

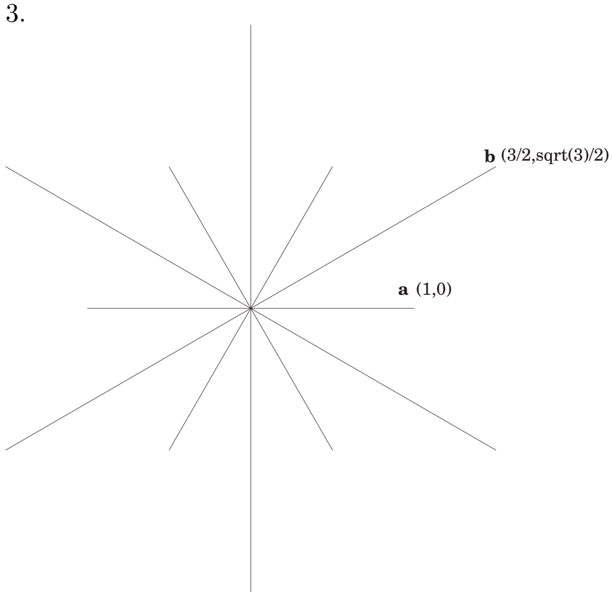
以上より、角が

$0°$ のとき長さの比は 2 または 1

$30°$ のとき長さの比は $\sqrt{3}$

$60°$ のとき長さは比は 1

3.



$S = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{12}\}$ とし

$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a} = (1, 0)$

$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b} = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

とする。

$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}_4 = 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}_6 = \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}_7 = -\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}_8 = -\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}_9 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}_{10} = 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}_{11} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}_{12} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$