京都大学　1976 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

多項式 $f(x)$ で，等式

$$f(x)f'(x)+\int_1^x f(t)\,dt=\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}$$

をみたしているものをすべて求めよ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数をあらわす．

解答

$f(x)$ を n 次の多項式として、

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\ (a_0\neq 0)$ とする。

$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t)\,dt&=\left[\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+a_nx\right]_1^x\\&=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n1}x^n+\cdots+a_nx-(\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n)\\&=\frac{a_0}{n+1}(x^{n+1}-1)+\frac{a_1}{n}(x^n-1)+\cdots+a_n(x-1)\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ は $n+1$ 次

$f(x)f'(x)$ は $2n-1$ 次

その和が 1 次となるためには $n\geqq 1$ の場合

$2n-1$ と $n+1$ が一致し、その係数が相殺する必要がある。

よって $n=2$

少なくとも $f(x)=ax^2+bx+c$ の形でなければならない。

すると

$f'(x)=2ax+b$

$\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=\frac{a}{3}(x^3-1)+\frac{b}{2}(x^2-1)+c(x-1)$

となるので

$$\begin{aligned}&f(x)f'(x)+\int_1^x f(t)\,dt\\&=(ax^2+bx+c)(2ax+b)+\frac{a}{3}(x^3-1)+\frac{b}{2}(x^2-1)+c(x-1)\\&=(2a^2+\frac{a}{3})x^3+(3ab+\frac{b}{2})x^2+(2ac+c+b^2)x+bc-c-\frac{b}{2}-\frac{a}{3}\\&=\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}\end{aligned}$$

よって

$$2a^2+\frac{a}{3}=0$$
$$3ab+\frac{b}{2}=0$$
$$2ac+c+b^2=\frac{4}{9}$$
$$bc-c-\frac{b}{2}-\frac{a}{3}=-\frac{4}{9}$$

$2a^2+\dfrac{a}{3}=0$ より
$a(2a+\dfrac{1}{3})=0$
$a=0,-\dfrac{1}{6}$

$3ab+\dfrac{b}{2}=0$ より
$b(3a+\dfrac{1}{2})=0$
$b=0$ または $a=-\dfrac{1}{6}$
$a=0$ のとき
$3ab+\dfrac{b}{2}=0$ より
$b=0$
$2ac+c+b^2=\dfrac{4}{9}$ より
$c=\dfrac{4}{9}$
$bc-c-\frac{b}{2}-\frac{a}{3}=-\dfrac{4}{9}$ に代入すると
$-c=-\dfrac{4}{9}$ となり成立する。よって、$(a,b,c)=(0,0,\dfrac{4}{9})$ は条件を満たす。

$a=-\dfrac{1}{6}$ のとき
$2ac+c+b^2=\dfrac{4}{9}$ より
$(2a+1)c+b^2=\dfrac{4}{9}$
$(-\dfrac{2}{6}+1)c+b^2=\dfrac{4}{9}$
$\dfrac{2}{3}c+b^2=\dfrac{4}{9}$
$\dfrac{2}{3}c=\dfrac{4}{9}-b^2$
$c=\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{2}b^2$
$bc-c-\frac{b}{2}-\frac{a}{3}=-\dfrac{4}{9}$ に代入すると
$(b-1)(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{2}b^2)-\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{18}=-\dfrac{4}{9}$
$\dfrac{2}{3}(b-1)(1-\dfrac{9}{4}b^2)-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{8}{18}-\dfrac{1}{18}$
$12(b-1)(1-\dfrac{9}{4}b^2)-9b=-9$
$3(b-1)(4-9b^2)-9b=-9$
$3(b-1)(4-9b^2)=9(b-1)$
$3(b-1)(4-9b^2)-9(b-1)=0$
$3(b-1)(4-9b^2-3)=0$
$3(b-1)(1-9b^2)=0$
$3(b-1)(1-3b)(1+3b)=0$

$b=1,-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}$
このとき $c=\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{2}b^2$ なので
$b=1\ \rightarrow\ c=-\dfrac{5}{6}$
$b=\dfrac{1}{3}\ \rightarrow\ c=\dfrac{1}{2}$
$b=-\dfrac{1}{3}\ \rightarrow\ c=\dfrac{1}{2}$
以上より
$(a,b,c)=(0,0,\dfrac{4}{9}),(-\dfrac{1}{6},1,-\dfrac{5}{6}),(-\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}),(-\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2})$
$n=0$ の時は $(a,b)=(0,0)$ の場合に相当するので、上の結果の一部。
よって求める多項式は

$$f(x)=\frac{4}{9}$$
$$f(x)=-\frac{1}{6}x^2+x-\frac{5}{6}$$
$$f(x)=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$$
$$f(x)=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$$