京都大学　1976 年　入学試験　理系数学　問題 4

問題

正の数列 a_n（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）が不等式

$$a_n{}^3+3a_n{}^2-\left(9+\frac{1}{n}\right)a_n+5<0$$

をみたしているとき，次の (1)，(2) を証明せよ．ただし，(2) を先に証明してもよい．

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=1$
2. $(a_n-1)^2<\dfrac{1}{4n}$.

解答

まず 2. を証明する。
仮定より

$$\begin{aligned}
a_n{}^3+3a_n{}^2-\left(9+\frac{1}{n}\right)a_n+5&<0\\
a_n{}^3+3a_n{}^2-9a_n-\frac{a_n}{n}+5&<0\\
a_n{}^3+3a_n{}^2-9a_n+5-\frac{a_n}{n}&<0\\
(a_n-1)^2(a_n+5)&<\frac{a_n}{n}\\
(a_n-1)^2&<\frac{a_n}{(a_n+5)n}\\
(a_n-1)^2&<\frac{a_n}{(a_n+5)}\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$f(x)=x^3+3x^2-\left(9+\dfrac{1}{n}\right)x+5$ とおく
$a_n>0$ より $x>0$ の範囲で考える。
$f'(x)=3x^2+6x-9-\dfrac{1}{n}$
$f''(x)=6x+6$
より $x>0$ の範囲では $f''(x)>0$
したがって $x>\dfrac{5}{3}$ の範囲でも
$f'(x)>f'(\dfrac{5}{3})$
$f'(\dfrac{5}{3})=\dfrac{25}{3}+10-9-\dfrac{1}{n}=\dfrac{28}{3}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{28n-3}{3n}>0$
より $f'(x)>0$
よって
$f(x)$ は $x>\dfrac{5}{3}$ の範囲で単調増加
したがって
$f(x)>f(\dfrac{5}{3})=\dfrac{5}{3}^3+3\dfrac{5}{3}^2-9\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{3n}+5=\dfrac{5(16n-9)}{27n}>0$
しかし $f(a_n)<0$ なので
少なくとも $a_n<\dfrac{5}{3}$ が必要。

したがって

$$\begin{aligned} a_n &< \frac{5}{3} \\ 3a_n &< 5 \\ 4a_n &< a_n + 5 \\ \frac{a_n}{a_n+5} &< \frac{1}{4} \end{aligned}$$

以上より

$(a_n - 1)^2 < \dfrac{a_n}{(a_n+5)} \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{4n}$

次に 1.

2. より

$(a_n - 1)^2 < \dfrac{1}{4n}$

$(a_n - 1)^2 > 0$ より

$0 < \displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n - 1)^2 < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} = 0$ より

挟みうちの法則により

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n - 1)^2 = 0$

よって

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n - 1 = 0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

となる。