京都大学　1976 年　入学試験　理系数学　問題 5

問題

関数 $f(x)$ で 2 つの条件

（イ）$f(x)$ は微分可能

（ロ）$x \leqq 0$ のとき $f(x)=0$，$x \geqq 1$ のとき $f(x)=1$

をみたすものがある．

1. 微分可能な関数 $g(x)$ と正数 a が与えられたとき，上の関数 $f(x)$ を用いて，次の条件（ハ），（ニ）をみたす微分可能な関数 $h(x)$ を作れ．
   （ハ）$h(0)=0$
   （ニ）$|x|>a$ のとき $h(x)=g(x)$.
2. 関数 $f(x)$ の例を 1 作り，その関数が（イ）をみたしていることを確かめよ．ただし，関数 $f(x)$ が微分可能であるとは，すべての x の値においてその微分係数が存在することである．

解答

1.

$f(x), g(x)$ は微分可能なので、$f(x), g(x)$ の積や和によって作られた関数は微分可能

$f'(x)$ は $f(x)$ を微分したものとする。

$\dfrac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$

$\dfrac{d}{dx}(f(x)\times g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

また $f(x)$ が微分可能であるためには左極限と右極限が一致する必要があるので

$f'(0)=0$

$f'(1)=0$

となる。

$|x|>a$ において $h(x)=g(x)$

$0 \leqq x < a$ において $h(x)=f(\dfrac{x}{a})g(x)$

$-a<x<0$ において $h(x)=f(-\dfrac{x}{a})g(x)$

こうすると

$|x|>a$ において $h'(x)=g'(x)$

$x=a$ において $h'(x)=f'(1)g(a)+f(1)g(a)=g'(a)$

$0<x<a$ において $h'(x)=f'(\dfrac{x}{a})g(x)+f(\dfrac{x}{a})'g(x)$

$x=0$ において $h'(x)=f'(0)g(0)+f(0)g(0)=0$

$-a<x<0$ において $h'(x)=-f'(-\dfrac{x}{a})g(x)+f(-\dfrac{x}{a})g'(x)$

$x=a$ において $h'(x)=-f'(1)g(1)+f(1)g'(x)=g'(1)$

となり、各点で連続であり、$h(0)=f(0)g(0)=0$ となり、成立する。

2.

上記の通り $f'(0)=0, f'(1)=0$ であり

$f(0)=0, f(1)=1$ である必要があることから $0<x<1$ における $f(x)$ を x の多項式とすると、与えられた条件から 3 次以上であることが必要なので 3 次とすると

$f(x)=ax^3+bx^2+cx^+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

よって

$f(0) = d = 0$

$f'(0) = c = 0$

$f(1) = a + b + c + d = a + b = 1$

$f'(1) = 3a + 2b + c = 3a + 2b = 0$

となり

$a + b = 1$

$3a + 2b = 0$

を解いて

$a = -2$,$b = 3$

なので

$f(x)$ を以下の様に定義する。

$x \leqq 0$ において $f(x) = 0$

$0 < x < 1$ において $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

$x \geqq 1$ において $f(x) = 1$

このとき

$x = 0, 1$ における値は一致し連続

また $x < 0$,$0 < x < 1$,$x > 1$ においては定義より微分可能

$x = 0$ における左からの微分係数は

$$\lim_{x\to-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to-0} \frac{0}{x - 0} = 0$$

$x = 0$ における右からの微分係数は

$$\lim_{x\to+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to-0} \frac{-2x^3 + 3x^2}{x} = \lim_{x\to-0} -2x^2 + 3x = 0$$

となり一致する。

$x = 1$ における左からの微分係数は

$$\lim_{x\to1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to1-0} \frac{-2x^3 + 3x^2 - 2 + 3}{x - 1} = \lim_{x\to1-0} \frac{-2(x^3 - 1) + 3(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x\to1-0} -2(x^3 + x^2 + 1) + 3(x^2 + 1) = -2(3) + 3(2) = 0$$

$x = 1$ における右からの微分係数は

$$\lim_{x\to1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to1+0} \frac{1 - 1}{x - 1} = 0$$

となり一致する。

よって以上より $f(x)$ は至るところ微分可能