京都大学　1976 年　入学試験　理系数学　問題 6

問題

外観では区別できない 2 つの袋 U_1，U_2 があり，U_1 には $4n$ 個の赤玉と n 個の白玉，U_2 には $2n$ 個の赤玉と $3n$ 個の白玉がそれぞれ入っている．この袋のどちらかが観測者に手渡され，袋 U_1 が手渡される確率は $\dfrac{2}{3}$，袋 U_2 が手渡される確率は $\dfrac{1}{3}$ である．観測者は手渡された袋から 3 個玉をとりだし，赤玉の数が白玉の数より多いときは手渡された袋は U_1 であると判断し，そうでないときは U_2 であると判断する．観測者が誤った判断を下す確率を p_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

解答

U_1 が手渡された場合

誤った判断を下すのは取り出した 3 個の玉が (赤白白) または (白白白) のとき

U_1 には $4n$ 個の赤玉と n 個の白玉が入っているので

(赤白白) となるのは
$$\frac{4n}{5n} \times \frac{n}{5n-1} \times \frac{n-1}{5n-2}$$
(白赤白) となるのは
$$\frac{n}{5n} \times \frac{4n}{5n-1} \times \frac{n-1}{5n-2}$$
(白白赤) となるのは
$$\frac{n}{5n} \times \frac{n-1}{5n-1} \times \frac{4n}{5n-2}$$
したがってこの確率は
$$\frac{12n^2(n-1)}{5n(5n-1)(5n-2)}$$
(白白白) となるのは
$$\frac{n}{5n} \times \frac{n-1}{5n-1} \times \frac{n-2}{5n-2}$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{5n(5n-1)(5n-2)}$$

U_2 が手渡された場合

誤った判断を下すのは取り出した 3 個の玉が (赤赤白) または (赤赤赤) のとき

U_2 には $2n$ 個の赤玉と $3n$ 個の白玉が入っているので

(赤赤白) となるのは
$$\frac{2n}{5n} \times \frac{2n-1}{5n-1} \times \frac{3n}{5n-2}$$
(赤白赤) となるのは
$$\frac{2n}{5n} \times \frac{3n}{5n-1} \times \frac{2n-1}{5n-2}$$
(白赤赤) となるのは
$$\frac{3n}{5n} \times \frac{2n}{5n-1} \times \frac{2n-1}{5n-2}$$
したがってこの確率は
$$\frac{18n^2(2n-1)}{5n(5n-1)(5n-2)}$$
(赤赤赤) となるのは
$$\frac{2n}{5n} \times \frac{2n-1}{5n-1} \times \frac{2n-2}{5n-2}$$
$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{5n(5n-1)(5n-2)}$$

U_1 が手渡される確率が $\dfrac{2}{3}$,U_2 が手渡される確率が $\dfrac{1}{3}$ なので

誤った判断を下す確率は $\frac{2}{3}(\frac{12n^2(n-1)}{5n(5n-1)(5n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{5n(5n-1)(5n-2)}) + \frac{1}{3}(\frac{18n^2(2n-1)}{5n(5n-1)(5n-2)} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{5n(5n-1)(5n-2)})$

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{3}(\frac{12n^2(n-1)}{5n(5n-1)(5n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{5n(5n-1)(5n-2)}) + \frac{1}{3}(\frac{18n^2(2n-1)}{5n(5n-1)(5n-2)} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{5n(5n-1)(5n-2)}) \\
&= \frac{2}{3\cdot 5n(5n-1)(5n-2)}(12n^2(n-1)+n(n-1)(n-2)) + \frac{1}{3\cdot 5n(5n-1)(5n-2)}(18n^2(2n-1)+2n(2n-1)(2n-2)) \\
&= \frac{2(12n^2(n-1)+n(n-1)(n-2)) + (18n^2(2n-1)+2n(2n-1)(2n-2))}{3\cdot 5n(5n-1)(5n-2)} \\
&= \frac{24n^3-24n^2+2n^3-6n^2+4n+36n^3-18n^2+8n^3-12n^2+4n}{3\cdot 5n(5n-1)(5n-2)} \\
&= \frac{70n^3-60n^2+8n}{3\cdot 5n(5n-1)(5n-2)} \\
&= \frac{70n^2-60n+8}{375n^2}
\end{aligned}
$$

$$p_n = \frac{70n^2-60n+8}{375n^2}$$

2.

$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{70n^2-60n+8}{3\cdot 5(5n-1)(5n-2)} = \frac{14}{75}$

以上より

$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{14}{75}$