京都大学　1977 年　入学試験　文系数学　問題 5

問題

p が素数であれば，どんな自然数 n についても $n^p - n$ は p で割り切れる．このことを，n についての数学的帰納法で証明せよ．

解答

Fermat の定理
$n = 1$ のとき
$1^p - 1 = 0$ なので成立する。

$n = k$ のとき成立すると仮定すると
$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned}(k+1)^p - (k+1) &= k^p + pk^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}k^{p-2} + \cdots + \frac{p!}{(p-1)!} + 1 - k - 1 \\ &= k^p - k + pk^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}k^{p-2} + \cdots + \frac{p!}{(p-1)!}\end{aligned}$$

pk^{p-1}
$\dfrac{p(p-1)}{2}k^{p-2}$
$\dfrac{p(p-1)(p-2)}{6}k^{p-2}$
$\vdots$
$\dfrac{p!}{(p-1)!}$

などの k^{p-1} から k までの係数はすべて整数。
しかし、p は素数なので分母の因数である 1 から $(p-1)$ の間には p と公約数を持つものは無い
したがって分子の p は約分されない。
よって各係数は p で割り切れる。
したがって $(k+1)^p - (k+1) = k^p - k + mp$(m は整数) と表せる。
$k^p - k$ を考えると前提より $k^p - k$ は p で割り切れるので $k^p - k = lp$ とすると
$(k+1)^p - (k+1) = lp + mp = (l+m)p$(m,l は整数) と表せる。
したがって $(k+1)^p - (k+1)$ は p で割り切れる。
以上より
$n^p - n$ は
$n = 1$ のとき p で割り切れる。
$n = k$ のとき割り切れると仮定すると $n = k + 1$ の時割り切れる。
したがって数学的帰納法によりどんな自然数 n についても割り切れる。