京都大学　1977年　入学試験　文系数学　問題6

問題

　AB $>$ AC であるような $\triangle$ABC において，辺 BC の三等分点 M，N をとる（BM $=$ MN $=$ NC）．このとき，

1. AM と AN との大小関係をしらべよ．
2. $\angle$BAM と $\angle$CAN との大小関係をしらべよ．

解答

BC に A から降ろした垂線の足を H とする。
$\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2=\mathrm{AH}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{CH}^2$ なので
$\mathrm{AB}^2-\mathrm{AC}^2=\mathrm{BH}^2-\mathrm{CH}^2$ となり
$\mathrm{AB}>\mathrm{AC}$ より
$\mathrm{BH}^2>\mathrm{CH}^2$
$\mathrm{BH}>0,\mathrm{CH}>0$ より
$\mathrm{BH}>\mathrm{CH}$
$\mathrm{BM}=\mathrm{MN}=\mathrm{NC}=l$ とすると
$\mathrm{BH}-\mathrm{CH}>0$
$\mathrm{BH}+\mathrm{CH}=3l$ より
$\mathrm{BH}-\mathrm{CH}>0$
$\mathrm{BH}-3l=-\mathrm{CH}$ より $2\mathrm{BH}-3l>0$
$\mathrm{BH}>\dfrac{3}{2}l$
したがって
$\mathrm{MH}=\mathrm{BH}-\mathrm{BM}>\dfrac{1}{2}l$

$\mathrm{BH}\leqq 2l$ の場合は
$\mathrm{NH}=\mathrm{BN}-\mathrm{BH}=2l-\mathrm{BH}<\dfrac{1}{2}<\mathrm{MH}$
$\mathrm{BH}>2l$ の場合は
$\mathrm{NH}=\mathrm{BH}-\mathrm{BN}=\mathrm{BH}-2l<\mathrm{BH}-l=\mathrm{MH}$
以上より
$\mathrm{NH}<\mathrm{MH}$
$\mathrm{AM}^2-\mathrm{MH}^2=\mathrm{AH}^2=\mathrm{AN}^2-\mathrm{NH}^2$ なので
$\mathrm{AM}^2-\mathrm{AN}^2=\mathrm{MH}^2-\mathrm{NH}^2$
$\mathrm{NH}<\mathrm{MH}$ より
$\mathrm{MH}^2-\mathrm{NH}^2>0$ なので
$\mathrm{AM}^2-\mathrm{AN}^2>0$
$\mathrm{AM}>0,\mathrm{AN}>0$ なので
$\mathrm{AM}>\mathrm{AN}$
2.
$\triangle$ABC の BC を底辺としてみると、$\triangle$BAM,$\triangle$MAN,$\triangle$NAC は底辺の長さと高さが一致するのでその面積は等しい
その面積を S とする。

∠BAM=α

∠MAN=β

∠NAC=γ

$\mathrm{BM}=\mathrm{MN}=\mathrm{NC}=l$

AM= m,AN= n,AB= b,AC= c とおくと

$bm\sin\alpha=2S$

$mn\sin\beta=2S$

$nc\sin\gamma=2S$

となる。

S は 0 ではないので $b,c,m,n,$,$\sin\alpha,\sin\beta\sin\gamma$ は 0 ではない。

$bm\sin\alpha=nc\sin\gamma$ より

$\dfrac{bm}{nc}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

$b>c$,$m>n$ より

$bm>nc$

以上より

$\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}>1$

α,γ,β は正で π より小さいので $\sin\alpha>0$

よって両辺に $\sin\alpha$ をかけても不等号は成立して

$\sin\gamma>\sin\alpha$

三角形がなりたつためには頂点 A の角度 ∠A は 0 や π であってはならないので

$0<\alpha+\beta+\gamma<\pi$

したがってすくなくとも

$0<\alpha+\gamma<\pi$

したがって α,γ ともに $\dfrac{\pi}{2}$ より大きくなることは無い

$\gamma>\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より $\gamma>\alpha$

$\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\alpha>\dfrac{\pi}{2}$ とすると

$\pi-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$ なので

$\sin x$ の値は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で単調増加なので

$\sin\gamma>\sin(\pi-\alpha)$ ならば $\gamma>(\pi-\alpha)$

しかし

$\alpha+\gamma<\pi$ なのでこれは成立しない

したがって $\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

この範囲では $\sin x$ は単調増加なので $\sin\gamma>\sin\alpha$ ならば

$\gamma>\alpha$

以上より

$$\angle\mathrm{BAM}<\angle\mathrm{CAN}$$