京都大学　1977 年　入学試験　理系数学　問題 1

問題

2 次方程式 $x^2+x-1=0$ の 2 つの根（解）a，b を成分にもつ，平面上のベクトル $\boldsymbol{u}=(a,b)$ を考える．同じ平面上のベクトル $\boldsymbol{v}=(c,d)$ で，$\boldsymbol{u}$ と直交し，長さが 1 であるものの成分 c，d を 2 つの根にもつ 2 次方程式を求めよ．

解答

(a,b) は $x^2+x-1=0$ の根なので

$a+b=-1$

$ab=-1$

$\boldsymbol{u}=(a,b)$ が直交するベクトルは $(b,-a)$ または $(-b,a)$ に平行

長さが単位ベクトルであるためには、

$(\pm\frac{b}{|\boldsymbol{u}|},\mp\frac{a}{|\boldsymbol{u}|})$

これを $\boldsymbol{v}=(c,d)$ とすると、

$c=\pm\frac{b}{|\boldsymbol{u}|}$

$d=\mp\frac{a}{|\boldsymbol{u}|}$

複号同順

したがって

$c+d=\pm\frac{b}{|\boldsymbol{u}|}+\mp\frac{a}{|\boldsymbol{u}|}$

$cd=-\frac{b}{|\boldsymbol{u}|}\frac{a}{|\boldsymbol{u}|}$

$|\boldsymbol{u}|^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1+2=3$ より

$c+d=\pm\frac{b-a}{\sqrt{3}}$

$cd=-\frac{ab}{3}=\frac{1}{3}$

$(b-a)^2=a^2+b^2-2ab=3+2=5$

$b-a=\pm\sqrt{5}$

したがって $c+d=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

以上より

(c,d) を解とする 2 次方程式は

$e(x-c)(x-d)=ex^2-(c+d)ex+ecd=0$ なので

$ex^2-(c+d)ex+ecd=e(x^2\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{3})=0$

両辺に 3 をかけて

$$e(3x^2+\sqrt{15}x+1)=0$$

$$e(3x^2-\sqrt{15}x+1)=0$$

$e\neq 0$

の二つ