京都大学　1977 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

正の数 a に対し，関数 $f(x)=ax-(1+a^4)x^3$ を考える．この関数のグラフが x 軸の正の部分と交わる点の x 座標を c とし，積分 $S_a=\int_0^c f(x)\,dx$ を考える．a の値をいろいろ変えたとき，S_a の値が最大になるような a の値を求めよ．

解答

$f(x)=x(a-(1+a^4)x^2)$ を解くと
$x=\pm\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4+1}}$
c はこの正の方なので
$c=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4+1}}$
よって $S_a=\int_0^c f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4+1}}} f(x)\,dx$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4+1}}} f(x)\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4+1}}} ax-(1+a^4)x^3\,dx\\
&=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{(1+a^4)}{4}x^4\right]_0^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4+1}}}\\
&=\frac{a}{2}(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4+1}})^2-\frac{(1+a^4)}{4}(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4+1}})^4\\
&=\frac{a}{2}(\frac{a}{a^4+1})-\frac{(1+a^4)}{4}(\frac{a}{a^4+1})^2\\
&=\frac{a^2}{2(a^4+1)}-\frac{a^2}{4(a^4+1)}\\
&=\frac{a^2}{4(a^4+1)}
\end{aligned}$$

$S_a=\dfrac{a^2}{4(a^4+1)}$
$\dfrac{d}{da}S_a=-\dfrac{(a-1)a(a+1)(a^2+1)}{2(a^4+1)^2}$
$\dfrac{d}{da}S_a=0$ の実数解は,$a=-1,0,1$ である。
したがって、S_a は $a>0$ のでは範囲 $0<a<1$ の範囲で単調増加

$a=1$ で極大

$a>1$ で単調減少

したがって、S_a は $a>0$ の範囲では $a=1$ で最大となる。

S_a を最大とする a は

$$a=1$$