京都大学　1977 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

関数 $f(x)=\sin x$ に対し，関数 $f^{(n)}(x)$ を，

$$f^{(0)}(x)=f(x),\quad f^{(n+1)}(x)=\frac{df^{(n)}(x)}{dx}$$

により定める $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$．任意の自然数 n について，2 つの関数 $y=xf^{(n-1)}(x)$ および $y=f^{(n)}(x)$ のグラフを，それぞれ C_1，C_2 とする．P が C_1 と C_2 の交点であれば，P における C_1，C_2 の接線 t_1，t_2 は互いに直交する．これを証明せよ．

解答

$f^{(1)}=\cos x$
$f^{(2)}=-\sin x$
$f^{(3)}=-\cos x$
$f^{(4)}=\sin x=f^{(0)}(x)$
$n=4$ において、$f^{(0)}(x)$ に戻るので、これ以降は
$n=4k$ のときは $f^{(n)}(x)=\sin x$
$n=4k+1$ のときは $f^{(n)}(x)=\cos x$
$n=4k+2$ のときは $f^{(n)}(x)=-\sin x$
$n=4k+3$ のときは $f^{(n)}(x)=-\cos x$
となる。
つまり
$k-l=2$ の時 $f^{(k)}(x)=-f^{(l)}(x)$
また $(f^{(n)}(x))^2+(f^{(n+1)}(x))^2=1$ が成立する。

C_1,C_2 の交点は $xf^{(n-1)}(x)=f^{(n)}(x)$ となる x
a をこのような値とすると
$g(x)=xf^{(n-1)}(x)$
$h(x)=f^{(n)}(x)$ とすると
とすると
$g'(x)=f^{(n-1)}(x)+x\dfrac{df^{(n-1)}(x)}{dx}=f^{(n-1)}(x)+xf^{(n)}(x)$
$h'(x)=\dfrac{df^{(n)}(x)}{dx}=f^{(n+1)}(x)$
なので
C_1 の $x=a$ での接線の傾きは
$g'(a)=f^{(n-1)}(a)+af^{(n)}(a)$
C_2 の $x=a$ での接線の傾きは
$h'(a)=f^{(n+1)}(a)$
このとき C_1 と平行なベクトルの一つ
$(1,g'(a))=(1,f^{(n-1)}(a)+af^{(n)}(a))$
をとると、これは長さは 0 ではない。
C_2 と平行なベクトルの一つ
$(1,h'(a))=(1,f^{(n+1)}(a))$

をとると、これは長さは 0 ではない。

これらの二つのベクトルの内積 b を計算すると
$b = 1 + (f^{(n-1)}(a) + af^{(n)}(a))f^{(n+1)}(a)$
以上の条件からこれを計算すると

$$\begin{aligned} b &= 1 + (f^{(n-1)}(a) + af^{(n)}(a))f^{(n+1)}(a) \\ &= 1 - (f^{(n-1)}(a) + af^{(n)}(a))f^{(n-1)}(a) \\ &= 1 - ((f^{(n-1)}(a))^2 + af^{(n)}(a)f^{(n-1)}(a)) \\ &= 1 - ((f^{(n-1)}(a))^2 + (f^{(n)}(a))^2) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって長さが 0 ではない二つのベクトルの内積が 0 になるので、このベクトルは直交する
したがって、C_1, C_2 の交点におけるそれぞれの接線は直交する。