京都大学　1977年　入学試験　理系数学　問題5

問題

1. 底辺の長さ a が一定で，他の2辺の和 m も一定（$m > a$）であるような三角形のうち，面積最大のものは，二等辺三角形であることを示せ．
2. 周囲の長さが一定な四辺形のうち，面積最大のものは正方形であることを示せ．

解答

1.
$s = \dfrac{m+a}{2}$ 底辺と異なる2辺の長さをそれぞれ b, c とすると
ヘロンの公式より面積 S の2乗 S^2 は $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ と表せる。

$$\begin{aligned} s(s-a)(s-b)(s-c) &= \frac{m+a}{2}(\frac{m+a}{2}-a)(\frac{m+a}{2}-b)(\frac{m+a}{2}-c) \\ &= \frac{m+a}{2}(\frac{m-a}{2})(\frac{m-b+a}{2})(\frac{b+a}{2}) \\ &= \frac{(m+a)(m-a)(m-b+a)(b+a)}{16} \end{aligned}$$

$m+a, m-a$ は定数なので
$(m-b+a)(b+a)$ が最大となるとき S は最大となる。
$(m-b+a)(b+a) = -b^2 + bm + am + a^2$
より
$f(b) = -b^2 + bm + am + a^2$ とすると
$f(b)$ は上に凸の2次式なので
$f'(b) = -2b + m$
より $b = \dfrac{m}{2}$ のとき最大となる。
したがって $c = m - b = \dfrac{m}{2}$ となり
面積が最大となるのは、$b = c$ つまり二等辺三角形のとき

2.
周の長さが一定の四辺形を ABCD とする。
ABCD はこの順で隣り合っているとする。
このとき三角形 ABC を考え AC、AB + BC を固定して変形する操作を行うと
1. よりこの三角形の面積は AB=BC となったとき最大となる。
次に三角形 CDA をに対しても同様の操作を行うと CD=DA となったとき最大となる。
ここまでの操作で AB=BC かつ CD=DA となっているので
AB + DA = BC + CD
今度は BD、BC + CD を固定して同様の操作を行うと BC=CD
同様に,DA=AB となり
AB + DA = BC + CD より AB = BC = CD = DA となる。
以上の操作で、四辺形は菱形となる。
菱形なので1辺の長さを l とすると面積は $l^2 \sin\angle\mathrm{BAD}$ となる。

ここで周囲の長さを一定にしているので l は定数
よってこの面積を最大にするのは $\sin\angle\mathrm{BAD}$ が最大となるとき
つまり $\angle\mathrm{BAD}=\dfrac{\pi}{2}$ となるとき
このとき四辺形は正方形となる。
また正方形についてはどの向かい合う頂点をとっても既に二等辺三角形となっているのでこれ以上面積を大きくする操作はできない。
よって周囲の長さが一定な四辺形のうち，面積最大のものは正方形である

証明終了