

問題

$a$  は正の定数であり, 2 つの関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  は次の 4 条件 (i) ~ (iv) をみたしている  
 (ここに  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ,  $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx}$ ) .

(i)  $f'(x) = -g(x)$

(ii)  $g'(x) \geq f(x)$  (すべての  $x$  の値について)

(iii)  $g(0) = 0$

(iv)  $0 \leq x \leq a$  ならば  $f(x) > 0$

このとき, 次の (1), (2) を示せ .

1.  $g(a) > 0$

2.  $a \leq y \leq a + \frac{f(a)}{g(a)}$ ,  $f(y) = 0$  となる実数  $y$  がある .

解答

問題においてすべての  $x$  において  $f(x), g(x)$  の微分係数が定義されているので  $f(x), g(x)$  は連続かつ微分可能としてよい。

1.

$0 \leq x \leq a$  の範囲では,  $f(x) > 0$  かつ  $g'(x) \geq f(x)$  なので  $0 \leq x \leq a$  の範囲では  $g'(x) > 0$

したがって  $g(x)$  は  $0 \leq x \leq a$  で単調増加

$x = 0$  において最小値をとり

$x = a$  において最大値をとる。

$g(0) = 0$  なので  $g(x) \geq 0$

最大値  $g(a) = 0$  と仮定すると  $g(x)$  の値は最大値 0 最小値 0 となり、この範囲で  $g(x) = 0$  となってしまう。

この場合  $g'(x) = 0$  で  $f(x) \leq 0$  となるがこれでは条件  $f(x) > 0$  を満たさない

したがって  $g(a) \neq 0$

よって  $g(a) > 0$

2.

$f(a) > 0$ ,  $g(a) > 0$  より  $\frac{f(a)}{g(a)} > 0$

よって  $a \leq y \leq a + \frac{f(a)}{g(a)}$  となる  $y$  は存在する。

次に  $f(a + \frac{f(a)}{g(a)})$  を考えると

$f(x)$  は微分可能なので平均値の定理より

$$\frac{f(a + \frac{f(a)}{g(a)}) - f(a)}{a + \frac{f(a)}{g(a)} - a} = f'(z)$$

かつ  $a \leq z \leq a + \frac{f(a)}{g(a)}$  となる  $z$  が存在する。

$f'(z) = -g(z)$  より

$$f(a + \frac{f(a)}{g(a)}) - f(a) = -g(z) \frac{f(a)}{g(a)}$$

$$f(a + \frac{f(a)}{g(a)}) = f(a) - g(z) \frac{f(a)}{g(a)}$$

$$f(a + \frac{f(a)}{g(a)}) = (g(a) - g(z)) \frac{f(a)}{g(a)}$$

$$f(a + \frac{f(a)}{g(a)}) > 0 \text{ とすると}$$

$$g(a) - g(z) > 0$$

$$g(z) - g(a) < 0 \text{ より}$$

$g(x)$  は微分可能なので平均値の定理より

$$\frac{g(z) - g(a)}{z - a} = g'(u) \text{ となる } u \text{ が区間 } [a, z] \text{ に存在する。}$$

つまり  $g'(u) < 0$  となる  $u$  が存在する。

$$g'(u) \geq f(u) \text{ なので } f(u) < 0$$

したがって  $f(x)$  は連続なので中間値の定理より  $f(y) = 0$  となる  $y$  が区間  $[a, u]$  に存在する。

$$\text{また、} f(a + \frac{f(a)}{g(a)}) < 0 \text{ とすると}$$

中間値の定理により

$$f(y) = 0 \text{ となる } y \text{ が区間 } [a, a + \frac{f(a)}{g(a)}] \text{ に存在する。}$$

$$\text{また、} f(a + \frac{f(a)}{g(a)}) = 0 \text{ とすると}$$

$$y = a + \frac{f(a)}{g(a)} \text{ とすると } f(y) = 0 \text{ となる。}$$

以上のいずれにしても  $f(y) = 0$  かつ  $a \leq y \leq a + \frac{f(a)}{g(a)}$  となる  $y$  が存在する。

証明終了