京都大学　1978 年　入学試験　文系数学　問題 4

問題

角 θ の回転を表わす行列を $R(\theta)$ とする．すなわち $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とする．2 次正方行列 X で，$X^3=R(\theta)$ をみたすものはどれだけあるかを考えたい．

1. 行列 X が，$X^3=R(\theta)$ をみたせば，X は逆行列をもち，かつ $R(\theta)X=XR(\theta)$ が成立することを示せ．
2. 行列 X が，ある角 α の回転を表わす行列 $R(\alpha)$ と，左上が正，左下が 0 であるような行列 T との積であるとする．すなわち $X=R(\alpha)T$，ただし $T=\begin{pmatrix}a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}$，$a>0$ とする．

   このとき，もし X が $R(\theta)X=XR(\theta)$ をみたし，さらに θ が π の整数倍でなければ，$a=c$，$b=0$ であることを示せ．
3. 一般に，逆行列をもつ任意の行列 X は，ある角 α の回転を表わす行列 $R(\alpha)$ と，左上が正，左下が 0 であるような行列 T との積 $X=R(\alpha)T$ として表わされる．行列に対応する 1 次変換を考えることによって，このことを示せ．
4. $X^3=R(\theta)$ をみたす行列 X は，θ が π の整数倍でなければ，ちょうど 3 個存在し，θ が π の整数倍ならば，無限に多く存在することを示せ．

解答

1.
X が $X^3=R(\theta)$ を満たすので
X は零行列ではない
両辺に左から X をかけて $XX^3=XR(\theta)$
また右から X をかけて $X^3X=R(\theta)X$
がともに成立する。
$XX^3=X^3X=X^4$ なので
$R(\theta)X=XR(\theta)$

$R(\theta)$ には逆行列が存在するのでそれを $R^{-1}(\theta)$ とすると
定義より $R^{-1}(\theta)=R(-\theta)$
$XR(\theta)=R(\theta)X$ に
左右から $R(-\theta)$ をかけると
$R(-\theta)XR(\theta)R(-\theta)=R(-\theta)R(\theta)XR(-\theta)$
$R(-\theta)X=XR(-\theta)$

$X^3=R(\theta)$ に右から $R(-\theta)$ をかけて
$X^3R(-\theta)=E$
$R(-\theta)X=XR(-\theta)$ より
$X^2R(-\theta)X=E$
つまり $X^2R(-\theta)$ は X の左逆行列となっている。
同様に左から $R(-\theta)$ をかけて

$R(-\theta)X^3 = E$

$XR(-\theta)X^2 = E$

となり

$R(-\theta)X^2 = XR(-\theta)X = X^2R(-\theta)$ は右逆行列になる。

よって X の逆行列は存在する。

2.

$X = R(\alpha)T \ T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ (a > 0)$

であるとする。

X が $R(\theta)X = XR(\theta)$ をみたすならば

$R(\theta)R(\alpha)T = R(\alpha)TR(\theta)$

左から $R(-\theta)$ をかけて

$R(-\theta)R(\theta)R(\alpha)T = R(-\theta)R(\alpha)TR(\theta)$

$R(\alpha)T = R(-\theta)R(\alpha)TR(\theta)$

左から $R(-\alpha)$ をかけて

$T = R(-\alpha)R(-\theta)R(\alpha)TR(\theta)$

$R(\theta)R(\alpha)$ は回転行列の定義から

$R(\theta)R(\alpha) = R(\theta + \alpha)$ なので

$T = R(-\alpha - \theta + \alpha)TR(\theta)$

$T = R(-\theta)TR(\theta)$

左から $R(\theta)$ をかけて

$TR(\theta) = R(\theta)T$

要素に展開すると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a\cos\theta + b\sin\theta & -a\sin\theta + b\cos\theta \\ c\sin\theta & c\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta & b\cos\theta - c\sin\theta \\ a\sin\theta & b\sin\theta + c\cos\theta \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} a\cos\theta + b\sin\theta &= a\cos\theta \\ -a\sin\theta + b\cos\theta &= b\cos\theta - c\sin\theta \\ c\sin\theta &= a\sin\theta \\ c\cos\theta &= b\sin\theta + c\cos\theta \end{aligned}$$

が成立する。

$a\cos\theta + b\sin\theta = a\cos\theta$ より

$b\sin\theta = 0$

しかし $\theta \neq n\pi$ なので $\sin\theta \neq 0$

よって $b = 0$

$c\sin\theta = a\sin\theta$ より $\theta \neq n\pi$ なので $\sin\theta \neq 0$

$c = a$

3.

X が逆行列を持つとしてそれを X^{-1} と表す。
行列 X に対応する１次変換を考える。
$X=\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ とする
逆行列が存在するので $sv-ut\neq 0$
したがって s,u ともに０とはならないので $s^2+u^2>0$
このとき
点 (x,y) を考えると $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$ なので
１次変換においては線形性が保証されるので $(1,0),(0,1)$ についての変換だけを考えればよい。
$X(1,0)=(s,u)=\dfrac{1}{s^2+u^2}(\cos\alpha,\sin\alpha)$
$X(0,1)=(t,v)$
と表すことができる。
したがって
$X=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{s^2+u^2}}\cos\alpha & s \\ \dfrac{1}{\sqrt{s^2+u^2}}\sin\alpha & t \end{pmatrix}$ と表すことができる。
$l=\dfrac{1}{\sqrt{s^2+u^2}}$
$m=t\cos\alpha+v\sin\alpha$
$n=v\cos\alpha-t\sin\alpha$
とおくと $t=m\cos\alpha-n\sin\alpha$
$v=m\sin\alpha+n\cos\alpha$
なので

$$\begin{aligned} X&=\begin{pmatrix} l\cos\alpha & m\cos\alpha-n\sin\alpha \\ l\sin\alpha & m\sin\alpha+n\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

定義より $l>0$
よって $X=R(\alpha)T$ と表せる。
4.
$X^3=R(\theta)$ をみたす行列 X が存在するとすれば 1. より逆行列が存在し 3. によって $X=R(\alpha)T$ と表すことができる。
1. より $XR(\theta)=R(\theta)X$ なので
2. より $X=R(\alpha)T$ とすると $\theta\neq n\pi$ ならば
$T=\begin{pmatrix} l & 00 & l \end{pmatrix}=l\begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}=lE$
となる。
よって
$X^3=R(\alpha)TR(\alpha)TR(\alpha)T$ なので
$X^3=l^3R(3\alpha)$
よって $R(\theta)=l^3R(3\alpha)$
したがって

$$\begin{aligned} \cos\theta&=l^3\cos 3\alpha \\ \sin\theta&=l^3\sin 3\alpha \end{aligned}$$

右辺を変形して

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

より

$$\cos\theta = l^3(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$$
$$\sin\theta = l^3(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)$$

$$\cos^2\theta = (l^3(4\cos^2\alpha - 3)\cos\alpha)^2$$
$$\sin^2\theta = (l^3(3 - 4\sin^2\alpha)\sin\alpha)^2$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = (l^3(4\cos^2\alpha - 3)\cos\alpha)^2 + (l^3(3 - 4\sin^2\alpha)\sin\alpha)^2$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ なので

$$\begin{aligned}
&(l^3(4\cos^2\alpha - 3)\cos\alpha)^2 + (l^3(3 - 4\sin^2\alpha)\sin\alpha)^2 \\
&= l^6\cos^2\alpha(16\cos^4\alpha - 24\cos^2\alpha + 9) + l^6\sin^2\alpha(16\sin^4\alpha - 24\sin^2\alpha + 9) \\
&= l^6(16\cos^6\alpha - 24\cos^4\alpha + 9\cos^2\alpha + 16\sin^6\alpha - 24\sin^4\alpha + 9\sin^2\alpha) \\
&= l^6(16\cos^6\alpha + 16\sin^6\alpha - 24\cos^4\alpha - 24\sin^4\alpha + 9) \\
&= l^6(16(1-\sin^2\alpha)^3 + 16\sin^6\alpha - 24(1-\sin^2\alpha)^2 - 24\sin^4\alpha + 9) \\
&= l^6(16 - 48\sin^2\alpha + 48\sin^4\alpha - 16\sin^6\alpha + 16\sin^6\alpha - 24 + \\
&\quad 48\sin^2\alpha - 24\sin^4\alpha - 24\sin^4\alpha + 9) \\
&= l^6 = 1
\end{aligned}$$

よって $l^6 = 1$

l は実数なので $l = \pm 1$

しかし $l > 0$ なので $l = 1$

以上より

$R(\theta) = R(3\alpha)$

したがって

$\cos\theta = \cos 3\alpha$

$\sin\theta = \sin 3\alpha$

したがって

$\theta = 3\alpha + 2n\pi$ $\alpha = \dfrac{\theta - 2n\pi}{3}$

以上より

$\alpha = \dfrac{\theta - 2n\pi}{3}$

整数 n は k, l は整数で $n = 3k + l$ $(0 \leqq l \leqq 2)$ と表せるので

$\alpha = \dfrac{\theta - 2(3k + l)\pi}{3}$

$\alpha = \dfrac{\theta - 2l\pi}{3} - 2k\pi$

となり

角として考える場合 $2k\pi$ は無視してよい

したがって X は

$$\alpha = \frac{\theta}{3}, \frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}$$

の三つ

$\theta = n\pi$ ならば
$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\pi & -\sin n\pi \\ \sin n\pi & \cos n\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ なので
$X^3 = \pm E$

$X^3 = E$ のとき
$X^2 = X^{-1}$
$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ よって

$$\begin{aligned} a^2+bc &= \frac{d}{ad-bc} \\ ab+bd &= \frac{-b}{ad-bc} \\ ac+cd &= \frac{-c}{ad-bc} \\ bc+d^2 &= \frac{a}{ad-bc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(a+d)(ad-bc) &= -b \\ c(a+d)(ad-bc) &= -c \\ (a^2+bc)(ad-bc) &= d \\ (bc+d^2)(ad-bc) &= a \end{aligned}$$

$b = 0, c = 0$ とすると
$ad - bc \neq 0$ より $ad \neq 0$ なので
$(a^2)(ad) = d$
$a^3 = 1$
同様に $d^3 = 1$
となり $X = E$

$b \neq 0$,$c = 0$ ならば
$(a+d)ad = -1$
$a^3 d = d$
$a^3 = 1$ となり $a = 1$
したがって $(d+1)d = d^2 + d + 1 = 0$ となるがこれは実数解を持たないので $b = 0$
つまり $c = 0$ ならば $b = 0$
$b \neq 0, c \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned} (a+d)(ad-bc) &= -1 \\ (a^2+bc)(ad-bc) &= d \\ (bc+d^2)(ad-bc) &= a \end{aligned}$$

$4bc + 3 < 0$ の範囲で
$a = \frac{-1 \pm \sqrt{-4bc-3}}{2}$

$d = \dfrac{-1 \mp \sqrt{-4bc-3}}{2}$
複号同順

となり,X は無限に存在する。

$X^3 = -E$ の場合も同様に

$X = -E$ または

$4bc + 3 < 0$ の範囲で
$a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-4bc-3}}{2}$
$d = \dfrac{-1 \mp \sqrt{-4bc-3}}{2}$
複号同順

となりの X は無限に存在する。

証明終了