京都大学　1978年　入学試験　文系数学　問題5

問題

$f(x)$ は実数を係数とする x の多項式とする．

1. すべての整数 k について，$f(k)$ が整数であるための必要十分条件は，$f(0)$ が整数であって，すべての整数 k について，$f(k)-f(k-1)$ が整数となることである．これを証明せよ．
2. $f(x)=ax^2+bx+c$ のとき，すべての整数 k について，$f(k)$ が整数となるために，係数 a，b，c がみたすべき必要十分条件を求めよ．

解答

1.

$f(0)$ が整数である。

$f(k-1)$ が整数であれば $f(k)=f(k-1)+n(n$ は整数$)$ なので $f(k)$ は整数。

よって数学的帰納法よりすべての整数 k について $f(k)$ は整数である。

また、逆にすべての k について $f(k)$ が整数であれば、$f(k)-f(k-1)$ は整数であるのは自明

よって必要十分である。

2.

$f(x)=ax^2+bx+c$ のとき $f(k)-f(k-1)=ak^2+bk+c-(a(k-1)^2+b(k-1)+c)=a(2k-1)+b$ この式が任意の k に付いて整数である必要があるので

$k=1$ の時

$a+b=n$ が整数

$a(2k-1)+b=m$ が整数

$b=n-a$ を代入すると

$2ak=m-n$

$2ak$ が任意の k について整数であるためには $a=\frac{1}{2}l(l$ は整数$)$ が必要

このとき $b=n-a$ より $b=n-\frac{1}{2}l$ より

$a(2k-1)+b=\frac{1}{2}l(2k-1)+n-\frac{1}{2}l=lk+n$

となり任意の整数 k において整数となる。

$f(0)$ は整数でなければならないので c は整数であることが必要。

以上より

任意の整数 l,m,n について

$$a=\frac{l}{2},b=n-\frac{l}{2},c=m$$

が必要。

またこのとき

$f(k)=\frac{l}{2}k^2+n-l2k+m=\frac{k(k-1)}{2}l+n+m$ となり

任意の k において k または $k-1$ のどちらかは偶数なので $k(k-1)$ は2で割り切れて

$\frac{k(k-1)}{2}$ は整数

よって $f(k)$ は整数の積と和のみで構成されるので整数。

よって必要十分。

証明終了