京都大学　1978年　入学試験　文系数学　問題6

問題

数0または1を n 個並べて得られる数列

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\} \quad a_i=0 \text{ または } 1$$

を考える．これに対して，新しい数列

$$A'=\{a'_1,a'_2,\cdots,a'_n\} \quad a'_i=0 \text{ または } 1$$

を次のように定める：

n 角形の頂点に，a_1，a_2，$\cdots$，a_n をこの順に並べたとき，

a_i の両隣が等しければ（すなわち $a_{i-1}=a_{i+1}$ ならば），$a'_i=0$

a_i の両隣が異なれば（すなわち $a_{i-1}\neq a_{i+1}$ ならば），$a'_i=1$

と定める（$i=1$，2，$\cdots$，n，ただし $a_0=a_n$，$a_{n+1}=a_1$ とみなす）．

このとき，$n\geqq 3$ として，$A=A'$（すなわち $a_i=a'_i$，$i=1$，2，$\cdots$，n）となるような数列 A をすべて求めよ．

解答

この数列 A は直前二つの数が決まると後が全部決まるので a_1,a_2 が決まるとすべてきまる。

また $a_n+1=a_1$ なのでつまり

$a_1=0,a_2=0$ とすると

$a_2=0$ なので $a_3=a_1$ より $a_3=0$

同様に

$a_k=0,a_{k+1}=0$ ならば $a_{k+2}=0$

よって数学的帰納法により $a_i=0$

つまり $A=\{0,0,0,\cdots,0\}(n\geqq 3$ 個$)(n$ は整数$)$

$a_1=0,a_2=1$ とすると

$a_2=1$ なので $a_3=1$

$a_3=1$ なので $a_4=0$

$a_4=0$ なので $a_5=1$

$a_5=1$ なので $a_6=1$

$k=3l$ のとき 1

$k=3l+1$ のとき 0

$k=3l+2$ のとき 1

であれば $a_{3l}=1$ なので $a_{3l+1}\neq a_{3l-1}$ なので $a_{3l+1}=0$

$a_{3l+1}=0$ なので $a_{3l}=a_{3l+2}$ なので $a_{3l+2}=1$

$a_{3l+2}=1$ なので $a_{3l+1}\neq a_{3l+3}$ なので $a_{3l+3}=1$

となり任意の l において成立する。

このとき $a_1=a_{n+1}$ より $n+1=3l+1$ の場合成立するから

$A=\{0,1,1,0,1,1,0,1,1,\cdots,0,1,1\}$ $(n=3l\geqq 3$ 個$)(l$ は整数$)$

$a_1=1,a_2=0$ の時

$a_2=0$ より $a_3=1$

$a_3=1$ より $a_4=1$

$a_4=1$ より $a_5=0$

$a_5 = 0$ より $a_6 = 1$

$a_6 = 1$ より $a_5 = 1$

$k = 3l$ のとき 1

$k = 3l + 1$ のとき 1

$k = 3l + 2$ のとき 0

であれば $a_{3l} = 1$ なので $a_{3l+1} \neq a_{3l-1}$ なので $a_{3l+1} = 1$

$a_{3l+1} = 1$ なので $a_{3l} \neq a_{3l+2}$ なので $a_{3l+2} = 0$

$a_{3l+2} = 0$ なので $a_{3l+1} = a_{3l+3}$ なので $a_{3l+3} = 1$

となり任意の l において成立する。

このとき $a_1 = a_{n+1}$ より $n + 1 = 3l + 1$ の場合成立するから

$A = \{1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \cdots, 1, 0, 1\}$ $(n = 3l \geqq 3$ 個$)(l$ は整数$)$

$a_1 = 1, a_2 = 1$ のとき

同様に $a_{3l} = 0$ なので $a_{3l+1} = a_{3l-1}$ なので $a_{3l+1} = 1$

$a_{3l+1} = 1$ なので $a_{3l} \neq a_{3l+2}$ なので $a_{3l+2} = 1$

$a_{3l+2} = 1$ なので $a_{3l+1} = a_{3l+3}$ なので $a_{3l+3} = 0$

となり任意の l において成立する。

このとき $a_1 = a_{n+1}$ より $n + 1 = 3l + 1$ の場合成立するから

$A = \{1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \cdots, 1, 1, 0\}$ $(n = 3l \geqq 3$ 個$)(l$ は整数$)$

以上の 4 種類に限る。

証明終了