京都大学　1978 年　入学試験　理系数学　問題 1

問題

a，b，c を正の数とするとき，不等式

$$2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right) \leqq 3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)$$

を証明せよ．また，等号が成立するのはどんな場合か．

解答

$(a+b+c)-3\sqrt[3]{abc}-(a+b)+2\sqrt{ab}=c-3\sqrt[3]{abc}+2\sqrt{ab}$
$t^3=c$ となるような実数 t を一つとる。
$f(t)=t^3-3t\sqrt[3]{ab}+2\sqrt{ab}$ とすると
$f(0)=\sqrt{ab}>0$
$f'(t)=3t^2-3\sqrt[3]{ab}$
より $t^2=\sqrt[3]{ab}$ のとき $f'(t)=0$ となる
$\sqrt[3]{ab}>0$ なので $t=\pm\sqrt{\sqrt[3]{ab}}$
$t>0$ より
$t=\sqrt{\sqrt[3]{ab}}$
のとき $f(t)$ は極小となる。
したがって $t>0$ の範囲では、$f(\sqrt{\sqrt[3]{ab}})$ が最小値となる。
$t^2=\sqrt[3]{ab}$
$t^3=\sqrt{ab}$
より

$$\begin{aligned} f(\sqrt{\sqrt[3]{ab}}) &= t^3-3t\sqrt[3]{ab}+2\sqrt{ab} \\ &= t^3-3t^3+2t^3=0 \end{aligned}$$

よって $f(t)\geqq 0$
したがってこの不等式は成立する。
また、等号となるのは $f(t)=0$ となるときなので
上記の通り $c=\sqrt{ab}$ のとき
証明終了