京都大学　1978 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

$\triangle$OAB の重心 G を通る直線が, 辺 OA, OB とそれぞれ辺上の点 P, Q で交わっているとする．$\vec{\mathrm{OP}} = h\vec{\mathrm{OA}}$, $\vec{\mathrm{OQ}} = k\vec{\mathrm{OB}}$ とし，$\triangle$OAB，$\triangle$OPQ の面積をそれぞれ S，T とすれば，次の関係が成り立つことを示せ.

1. $\dfrac{1}{h} + \dfrac{1}{k} = 3$
2. $\dfrac{4}{9}S \leqq T \leqq \dfrac{1}{2}S$

解答

1.

G は三角形 OAB の重心なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$$

また、PQ は G を通るので

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = t(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) + \overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

以上より

$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3} = t(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3} = tk\overrightarrow{\mathrm{OB}} + h(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

が成り立つ

OAB が三角形となるためには、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立でなければならないので

この等式が成立するためには

$tk = \dfrac{1}{3}$

$(1-t)h = \dfrac{1}{3}$

でなければならない

$0 \leqq k \leqq 1$,$0 \leqq t \leqq 1$ より

$tk = \dfrac{1}{3}$ となるためには $k \neq 0$ ならば

$t = \dfrac{1}{3k} > \dfrac{1}{3}$

したがって $t \neq 0$ なので

$k = \dfrac{1}{3t} > \dfrac{1}{3}$

となり $k = 0$ は不適当

また同様に

$h \neq 0$ ならば

$(1-t) = \dfrac{1}{3h} > \dfrac{1}{3}$ より

$t < \dfrac{2}{3}$

したがって $k > \dfrac{1}{2}$

同様に $h > \dfrac{1}{2}$

したがって h, k, t は

$\frac{1}{2} \leqq h \leqq 1$
$\frac{1}{2} \leqq k \leqq 1$
$\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{2}{3}$

の範囲

以上より $t \neq 0$ なので
$k = \frac{1}{3t}$
$h = \frac{1}{3(1-t)}$
よって

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = 3t + 3(1-t) = 3$$

2.
三角形 OPQ の面積 T は $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると
$T = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| \sin\theta = hk|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \sin\theta = hkS$
$hk = \frac{1}{9t(1-t)}$ なので
$T = \frac{1}{9t(1-t)} S$ である。
$f(t) = 9t(1-t)$ $(\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3})$ とすると $f'(t) = -18t + 9$ したがって
$\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$ の範囲では $f'(t) > 0$
$\frac{1}{2} < t < \frac{2}{3}$ の範囲では $f'(t) < 0$
となり
$f(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ で最大値をとり $t = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ の小さい方で最小値をとる。
$f(\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3}) = 2$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$
したがって

$$\frac{4}{9}S \leqq hkS = T < \frac{1}{2}S$$

証明終了