京都大学　1978 年　入学試験　理系数学　問題 5

問題

m，n は整数とし，$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$ とする．

1. 方程式 $f(x) = 0$ が三つの整数解（重解があってもよい）をもつような m，n の組をすべて求めよ．
2. 方程式 $f(x) = 0$ が少なくとも一つの整数解をもつために，m，n がみたすべき必要十分条件を求めよ．
3. $|m| \leqq 5$，$|n| \leqq 5$ の範囲で，(2) の条件をみたす m，n の組はいく通りあるか．

解答

1.
$f(x)$ が三つの整数解をもつということはその解を a, b, c としたとき
x^3 の係数が 1 なので
a, b, c が整数で
$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ と因数分解される場合である。
このとき $a \leqq b \leqq c$ としても一般性を失わない。
$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$
これが $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$ と恒等的に一致するので

$$\begin{aligned} a+b+c &= -m \\ ab+bc+ca &= n \\ -abc &= 2 \end{aligned}$$

となる必要がある。
まず $-abc = 2$ の場合を考える。
2 は素数なので 1, 2 にしか因数分解されない
したがって積が -2 になるためには
a, b, c の積の絶対値が 2 となる組み合わせは

a	b	c
2	1	1
1	2	1
1	1	2

またこのそれぞれについて 3 または 1 個の負の数が必要なので

$-a$	b	c	a	$-b$	c	a	b	$-c$	$-a$	$-b$	$-c$
-2	1	1	2	-1	1	2	1	-1	-2	-1	-1
-1	2	1	1	-2	1	1	2	-1	-1	-2	-1
-1	1	2	1	-1	2	1	1	-2	-1	-1	-2

$a \leqq b \leqq c$ の条件をいれると $(a, b, c) = (-2, -1, -1), (-2, 1, 1), (-1, 1, 2)$ となる。
$(a, b, c) = (-2, -1, -1)$ の場合

$$\begin{aligned} -(a+b+c) &= 4 = m \\ ab+bc+ca &= 5 = n \end{aligned}$$

$(a,b,c)=(-2,1,1)$ の場合

$$\begin{aligned} -(a+b+c) &= 0 = m \\ ab+bc+ca &= -3 = n \end{aligned}$$

$(a,b,c)=(-1,1,2)$ の場合

$$\begin{aligned} -(a+b+c) &= -2 = m \\ ab+bc+ca &= -1 = n \end{aligned}$$

したがって m,n の組み合わせは

$$(m,n)=(4,5),(0,-3),(-2,-1)$$

の 3 通り

2.

1. と同様に因数分解したとき

$f(x)=(x-a)(x^2+sx+t)$ と分解される。

a は整数。

これが $(x-a)(x^2+sx+t)=x^3+(s-a)x^2+(t-sa)x-at=x^3+mx^2+nx+2$ に一致するので

$$\begin{aligned} s-a &= m \\ t-sa &= n \\ -at &= 2 \end{aligned}$$

s,m は整数なので和は整数

よって $s=m+a$ より s は整数

$t=n+as$ より t は整数

よって $-at=2$ より

(a,t) は $(-2,1),(-1,2),(1,-2),(2,-1)$ の組み合わせしかあり得ない。

$(a,t)=(-2,1)$ のとき

$n=1+2s$

$m=s+2$

$(a,t)=(-1,2)$ のとき

$n=2+s$

$m=s+1$

$(a,t)=(1,-2)$ のとき

$n=-2-s$

$m=s-1$

$(a,t)=(2,-1)$ のとき

$n=-1-2s$

$m=s-2$

任意の整数 s について

$$(m,n)=(s+2,1+2s),(s+1,2+s),(s-1,-2-s),(s-2,-1-2s)$$

と表される。

また、このとき

$(m,n)=(s+2,1+2s)$ のとき

$f(x)=x^3+(s+2)x^2+(1+2s)x+2=(x+2)(x^2+sx+1)$

$(m,n)=(s+1,2+s)$ のとき

$f(x)=x^3+(s+1)x^2+(2+s)x+2=(x+1)(x^2+sx+2)$

$(m,n)=(s-1,-2-s)$ のとき

$f(x)=x^3+(s-1)x^2+(-2-s)x+2=(x-1)(x^2+sx-2)$

$(m,n)=(s-2,-1-2s)$ のとき

$f(x)=x^3+(s-2)x^2+(-1-s)x+2=(x-2)(x^2+sx-1)$

と因数分解されるのですくなくとも一つ整数解を持つ

よって $x^3+mx^2+nx+2=0$ が一つでも整数解を持つための必要十分条件は

$$(m,n)=(s+2,1+2s),(s+1,2+s),(s-1,-2-s),(s-2,-1-2s)$$

3.

2 より $(m,n)=(s+2,1+2s),(s+1,2+s),(s-1,-2-s),(s-2,-1-2s)$

を順にケース１、２、３、４とする。

$s=m-2,m-1,m+1,m+2$ そのとき

$n=2m-1,m+1,-3-m,-2m-5$

となり

それぞれのケースで $n-m=m-1,1,-3-2m,-3m-5$ となり他のケースと m,n の組が一致する可能性を考えると

ケース１、２では $m=2$ のとき一致し

s はケース１について 0, ケース２について 1

ケース１、３では

$3m=-2$ となる整数はないので一致しない。

ケース１、４では

$m=-1$ のとき一致し

s はケース１について -3, ケース４で 1

ケース２、３では

$m=-1$ のとき一致し

s はケース２については -2, ケース３では 0

ケース２、４では

$m=-2$ のとき一致し

s はケース２については -3, ケース４では 0

ケース３、４では

$m=-2$ のとき一致し

s はケース３については -1, ケース４では 0

以上の５通りの場合は結果が一致する。

$|m| \leqq 5, |n| \leqq 5$ より
$(m, n) = (s+2, 1+2s)$ のとき
$|s+2| \leqq 5, |1+2s| \leqq 5$ より
$-5 \leqq s+2 \leqq 5 \ \to \ -7 \leqq s \leqq 3$
$-5 \leqq 1+2s \leqq 5 \ \to \ -6 \leqq 2s \leqq 4 \ \to \ -3 \leqq s \leqq 2$
よって
$-3 \leqq s \leqq 2$
よって m, n の組は $s = -3, -2, -1, 0, -, 1, 2$ の 6 種類
$(m, n) = (s+1, 2+s)$ のとき
$|s+1| \leqq 5, |2+s| \leqq 5$ より
$-5 \leqq s+1 \leqq 5 \ \to \ -6 \leqq s \leqq 4$
$-5 \leqq 2+s \leqq 5 \ \to \ -7 \leqq s \leqq 3$
よって
$-6 \leqq s \leqq 3$
よって m, n の組は $s = -6, -5, \cdots, 2, 3$ の 10 種類
$(m, n) = (s-1, -2-s)$ のとき
$|s-1| \leqq 5, |-2-s| \leqq 5$ より
$-5 \leqq s-1 \leqq 5 \ \to \ -4 \leqq s \leqq 6$
$-5 \leqq -2-s \leqq 5 \ \to \ -3 \leqq -s \leqq 7 \ \to \ -7 \leqq s \leqq 3$
よって
$-4 \leqq s \leqq 3$
よって m, n の組は $s = -4, -3, \cdots, 2, 3$ の 8 種類
$(m, n) = (s-2, -1-2s)$ のとき
$|s-2| \leqq 5, |-1-2s| \leqq 5$ より
$-5 \leqq s-2 \leqq 5 \ \to \ -3 \leqq s \leqq 7$
$-5 \leqq -1-2s \leqq 5 \ \to \ -4 \leqq -2s \leqq 6 \ \to \ -3 \leqq s \leqq 2$
よって
$-3 \leqq s \leqq 2$
よって m, n の組は $s = -3, -3, \cdots, 2, 2$ の 6 種類
以上より
30 通りある。
しかし最初に重複の可能性を確認したときその条件はすべて $|m| \leqq 5, |n| \leqq 5$ を満たしているので
その他のケースの合計から引かねばならない。
よって m, n の組み合わせは

$$25 \text{ 通り}$$

証明終了