京都大学　1978 年　入学試験　理系数学　問題 6

問題

1.　m，n は自然数とする．三角関数の加法定理を用いて，等式

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}$$

が成り立つことを示し，さらに次の積分 $I_{m,n}$ を求めよ．

$$I_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$$

2.　整数 k（$0 \leqq k \leqq 5$），自然数 m，n および実数 a，b に対して，

$$f(k) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx - a\sin mx - b\sin nx)^2 \, dx,$$
$$p(k) = \frac{5!}{k!(5-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^5,$$
$$E = \sum_{k=0}^{5} p(k)f(k)$$

とおくとき，E を最小にするような m，n，a，b を求めよ．

解答

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ より
$\cos(m-n)x = \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx$
$\cos(m+n)x = \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx$
２式の差をとると
$\cos(m-n)x - \cos(m+n)x = 2\sin mx \sin nx$
よって

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}$$

$m \neq n$ の場合

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\} \, dx \\
&= \frac{1}{2}\{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\} \, dx \\
&= \frac{1}{2}\{\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$m = n$ の場合

$$
\begin{aligned}
I_{m,m} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin mx \, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\{\cos(m-m)x - \cos 2mx\} \, dx \\
&= \frac{1}{2}\{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2mx\} \, dx \\
&= \frac{1}{2}\{[x]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_{-\pi}^{\pi}\} \\
&= \frac{1}{2}(2\pi) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
f(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx - a \sin mx - b \sin nx)^2 \, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \{b^2 \sin^2 nx + 2ab \sin mx \sin nx - 2b \sin kx \sin nx \\
&\quad + a^2 \sin^2 mx - 2a \sin kx \sin mx + \sin^2 kx\} \, dx
\end{aligned}
$$

1. より

$$f(k) = b^2\pi + a^2\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{k,n} - 2aI_{k,m} + I_{k,k}$$

$$p(k)f(k) = \left\{\frac{5!}{k!(5-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}\{(b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{k,n} - 2aI_{k,m} + I_{k,k}\}$$

$p(k) = \frac{5!}{k!(5-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^5$ より

$p(0) = (\frac{1}{2})^5$

$p(1) = 5(\frac{1}{2})^5$

$p(2) = 10(\frac{1}{2})^5$

$p(3) = 10(\frac{1}{2})^5$

$p(4) = 5(\frac{1}{2})^5$

$p(5) = (\frac{1}{2})^5$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= (b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2b\int_{-\pi}^{\pi} \sin 0x \sin nx \, dx \\
&\quad - 2a\int_{-\pi}^{\pi} \sin 0x \sin mx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 0x \, dx \\
&= (b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n}
\end{aligned}
$$

$$f(1) = (b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{1,n} - 2aI_{1,m} + \pi$$
$$f(2) = (b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{2,n} - 2aI_{2,m} + \pi$$
$$f(3) = (b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{3,n} - 2aI_{3,m} + \pi$$
$$f(4) = (b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{4,n} - 2aI_{4,m} + \pi$$
$$f(5) = (b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{5,n} - 2aI_{5,m} + \pi$$

$F = 2^5E$ とする。

$$\begin{aligned}
F &= f(0) + 5f(1) + 10f(2) + 10f(3) + 5f(4) + f(5)\\
&= (b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n}\\
&\quad +5((b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{1,n} - 2aI_{1,m} + \pi)\\
&\quad +10((b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{2,n} - 2aI_{2,m} + \pi)\\
&\quad +10((b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{3,n} - 2aI_{3,m} + \pi)\\
&\quad +5((b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{4,n} - 2aI_{4,m} + \pi)\\
&\quad +(b^2+a^2)\pi + 2abI_{m,n} - 2bI_{5,n} - 2aI_{5,m} + \pi\\
&= 32\pi(b^2+a^2) + 31\pi\\
&\quad +64abI_{m,n}\\
&\quad -2a(5I_{1,m} + 10I_{2,m} + 10I_{3,m} + 5I_{4,m} + I_{5,m})\\
&\quad -2b(5I_{1,n} + 10I_{2,n} + 10I_{3,n} + 5I_{4,n} + I_{5,n})
\end{aligned}$$

$a \leqq 0, b \leqq 0$ とすると
$I_{m,n}$ の値は k, m, n の値に関係無く正または0だから
a, b の1次の項がすべて正または0となるので m, n の値にかかわり無く
最小値は $(32(b^2+a^2)+31)\pi$ となる。
この値を最小とする a, b の組は $a = b = 0$
そのときの最小値は $F = 31\pi$

a, b は対称なので $a > b$ としてもよい
したがって a, b どちらか1方が正であるためには $a > 0$
$a \geqq 0$ と m を固定すると
$g(a) = 32\pi a^2 - 2a(5I_{1,m} + 10I_{2,m} + 10I_{3,m} + 5I_{4,m} + I_{5,m}) + 31\pi$ は定数となり
$F = 32\pi(b^2) + 64abI_{m,n} - 2b(5I_{1,n} + 10I_{2,n} + 10I_{3,n} + 5I_{4,n} + I_{5,n}) + g(a)$ $b \leqq 0$ の場合
$64abI_{m,n} < 0$
$-2b > 0$ より
$m = n$ かつ $n > 5$ のとき最小となる。
そのときの値は $32\pi(b^2+ab) + g(a)$ なので
$b = -a/2$ のとき最小となる
したがってそのときの値は
$F = 32\pi((-a/2)^2 + a^2) + 31\pi - 32a^2\pi = 8a^2\pi + 31\pi$ となり、$a = 0$ のとき最小値 31π をとる。

$b > 0$ の場合
$64abI_{m,n} > 0$
$-2b < 0$ より
$m \neq n$,$n = 2, 3$ のとき最小となる。
a, b を入れ換えて考えたときも同様となるので

つまり $m=2,n=3$ のとき最小となる。
したがって

$$\begin{aligned} F &= 32\pi(b^2+a^2)+31\pi-2a(10\pi)-2b(10\pi) \\ &= (32(b^2+a^2)+31-20a-20b)\pi \\ &= (32a^2-20a+32b^2-20b+31)\pi \end{aligned}$$

$32a^2-20a$ が最小となる a は $a=5/8$
$32b^2-20b$ が最小となる b は $b=5/8$
よって $a=b=5/8$ のとき最小となって
$F=31\pi$
以上より
E を最小とする a,b,m,n の組合せは

$$\begin{aligned} a=b=0,m=n>5 \\ a=b=\frac{5}{8},m=2,n=3 \\ a=b=\frac{5}{8},m=3,n=2 \end{aligned}$$