京都大学　1979 年　入学試験　文系数学　問題 2

問題

$f(x)=1+2\cos x+3\sin x$ とする．すべての x に対して $af(x)+bf(x-c)=1$ が成り立つように，定数 a，b，c を定めよ．

解答

$g(x)=a(1+2\cos x+3\sin x)+b(1+2\cos(x-c)+3\sin(x-c))=1$ がすべての x について成り立つ。
したがって

$$\begin{aligned}
&a(1+2\cos x+3\sin x)+b(1+2\cos(x-c)+3\sin(x-c))\\
&=a+2a\cos x+3a\sin x+b+2b\cos(x-c)+3b\sin(x-c)\\
&=a+b+2a\cos x+3a\sin x+2b(\cos x\cos c+\sin x\sin c)+3b(\sin x\cos c-\cos x\sin c)\\
&=a+b+(2a+2b\cos c-3b\sin c)\cos x+(3a+2b\sin c+3b\cos c)\sin x\\
&=1
\end{aligned}$$

これが任意の x について成り立つためには
少なくとも $x=0,\pi/2,-\pi,-\pi/2$ の時成り立つ必要がある。
それぞれを計算すると
$g(0)=3a+b-3b\sin c+2b\cos c=1$
$g(\pi/2)=4a+b+2b\sin c+3b\cos c=1$
$g(\pi)=-a+b+3b\sin c-2b\cos c=1$
$g(-\pi/2)=-2a+b-2b\sin c-3b\cos c=1$

$4g(0)-3g(\pi/2)=b(1-\cos c-18\sin c)=1$
$2g(\pi)-g(-\pi/2)=b(1-\cos c+8\sin c)=1$
これらを同時に満たすには $\sin c=0$
$\sin^2 c+\cos^2 c=1$ より $\cos c=\pm1$
この条件で再度計算しなおすと

$$\begin{aligned}
g(0)&=3a+b+2b\cos c=3a+b(1+2\cos c)=3a+b(1\pm2)=1\\
g(\pi/2)&=4a+b+3b\cos c=4a+b(1+3\cos c)=4a+b(1\pm3)=1\\
g(\pi)&=-a+b-2b\cos c=-a+b(1-2\cos c)=-a+b(1\mp2)=1\\
g(-\pi/2)&=-2a+b-3b\cos c=-2a+b(1-3\cos c)=-2a+b(1\mp3)=1
\end{aligned}$$

$\cos c=1$ のとき

$$\begin{aligned}
3a+3b&=1\\
4a+4b&=1\\
-a-b&=1\\
-2a-2b&=1
\end{aligned}$$

が同時に成り立つ必要があるが
$3a+3b=4a+4b$ より
$a+b=0$
しかし $-a-b=1$ より $a+b=-1$ となり成立しない。

$\cos c = -1$ のとき

$$\begin{aligned} 3a - b &= 1 \\ 4a - 2b &= 1 \\ -a + 3b &= 1 \\ -2a + 4b &= 1 \end{aligned}$$

となり
$a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{2}$ で成立する。
以上より
a, b, c はすくなくとも $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, (2n+1)\pi$ である。
逆に a, b, c がこの値だとすると

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}(1 + 2\cos x + 3\sin x) + \frac{1}{2}(1 + 2\cos(x - (2n+1)\pi) + 3\sin(x - (2n+1)\pi)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2\cos x + 3\sin x + 1 + 2\cos(x - \pi) + 3\sin(x - \pi)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2\cos x + 3\sin x + 1 - 2\cos x - 3\sin x) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

以上より

$$(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, (2n+1)\pi)\ (n \text{ は整数})$$

証明終了