京都大学　1979 年　入学試験　文系数学　問題 3

問題

下記の表のように，次の規則によって数列を順に並べる．

（ア） 第 1 行は 1，1，1，1 である．

（イ） 第 2 行以下では，左右両端の数は 1 であり，その他の数は左上の数と右上の数との和である．

第 n 行の数列を ${}_nA_0$，${}_nA_1$，$\cdots$，${}_nA_k$，$\cdots$，${}_nA_{n+2}$ とかけば

$$(1+x^2)(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n+2} {}_nA_k x^k$$

が成り立つこと示せ．

$$\begin{array}{c} 1\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 2\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 4\ 4\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 7\ 8\ 7\ 4\ 1 \end{array}$$

解答

${}_nA_0 = 1$ である。

${}_nA_k = {}_{n-1}A_{k-1} + {}_{n-1}A_k$

したがって

$S_n = \sum_{k=0}^{n+2} {}_nA_k x^k$ とおく

$$\begin{aligned} S_n &= {}_nA_0 + {}_nA_1 x + {}_nA_2 x^2 + {}_nA_3 x^3 + \cdots + {}_nA_n x^n + {}_nA_{n+1} x^{n+1} + {}_nA_{n+2} x^{n+2} \\ &= 1 + {}_{n-1}A_0 x + {}_{n-1}A_1 x \\ &\quad + {}_{n-1}A_1 x^2 + {}_{n-1}A_2 x^2 \\ &\quad + {}_{n-1}A_2 x^3 + {}_{n-1}A_3 x^3 \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + {}_{n-1}A_{n-1} x^n + {}_{n-1}A_n x^n \\ &\quad + {}_{n-1}A_n x^{n+1} + {}_{n-1}A_{n+1} x^{n+1} \\ &\quad + {}_{n-1}A_{n+1} x^{n+2} + {}_{n-1}A_{n+2} x^{n+2} \\ &= 1 + {}_{n-1}A_1 x + {}_{n-1}A_2 x^2 + {}_{n-1}A_3 x^3 + \cdots + {}_{n-1}A_n x^n + x^{n+1} \\ &\quad + x(1 + {}_{n-1}A_1 x + {}_{n-1}A_2 x^2 + \cdots + {}_{n-1}A_{n-1} x^{n-1} + {}_{n-1}A_n x^n + x^{n+1}) \\ &= S_{n-1} + xS_{n-1} \\ &= (x+1)S_{n-1} \end{aligned}$$

以上より

$S_n = (x+1)S_{n-1}$

以上より S_n は公比 $(1+x)$ の等比数列であるから

$S_n = S_1(x+1)^{n-1}$

$S_1 = 1 + x + x^2 + x^3 = (x^2+1)(x+1)$ より

$S_n = (x^2+1)(x+1)^n$

証明終了