京都大学　1979 年　入学試験　理系数学　問題 1

問題

次の条件をみたしていて，かつ最高次の係数が 1 である x の整式 $P_1(x)$，$P_2(x)$，$P_3(x)$ を求めよ．

1. $P_1(x)$ は 1 次式であって，どんな定数 C に対しても
$$\int_{-1}^{1} P_1(x)C\,dx = 0$$
2. $P_2(x)$ は 2 次式であって，1 次以下のどんな整式 $f(x)$ に対しても
$$\int_{-1}^{1} P_2(x)f(x)\,dx = 0$$
3. $P_3(x)$ は 3 次式であって，2 次以下のどんな整式 $f(x)$ に対しても
$$\int_{-1}^{1} P_3(x)f(x)\,dx = 0$$

解答

1.
最高次の係数が 1 の整式なので
$P_1(x) = x + a$
$\displaystyle\int_{-1}^{1} P_1(x)C\,dx = C\int_{-1}^{1} P_1(x)\,dx = 0$ より
$\displaystyle\int_{-1}^{1} P_1(x)\,dx = 0$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_1(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} x + a\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + ax\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2} + a - (\frac{1}{2} - a) = 2a\end{aligned}$$

よって $a = 0$
したがって
$$P_1x = x$$

2.
$P_2(x) = x^2 + ax + b$
$f(x) = cx + d$ とする。
$f'(x) = c$
$\displaystyle\int P_2(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$
より

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_2(x)f(x)\,dx &= \left[(cx+d)(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_{-1}^{1} - \int P_2(x)c\,dx \\
&= \left[(cx+d)(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_{-1}^{1} - c\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_{-1}^{1} \\
&= (a-\frac{2}{3}-2b)c+(\frac{2}{3}+2b)d \\
&= 0
\end{aligned}
$$

これが任意の c, d について成立するので
$a-\frac{2}{3}-2b=0$ $\frac{2}{3}+2b=0$ よって $b=\frac{-1}{3}$
$a=-\frac{2}{3}-2b=0$

$$
P_2(x)=x^2-\frac{1}{3}
$$

3.
$P_3(x)=x^3+ax^2+b^x+c$
とおく
条件に一致するような $P_3(x)$ が二種類以上存在した場合
それを $p_1(x)$,$p_2(x)$ とすると $\int_{-1}^{1} p_1(x)f(x)\,dx=0$
$\int_{-1}^{1} p_2(x)f(x)\,dx=0$
より
$\int_{-1}^{1} (p_1(x)-p_2(x))f(x)\,dx=0$
となり x^3 の係数が 0 で条件を満たすものが存在することになる。
このような式を $g(x)$ とすると
$g(x)$ は 2 次以下の整式なので
$f(x)=g(x)$ をとれば、$g^2(x)\geqq 0$
そのとき $\int_{-1}^{1} g^2(x)\,dx=0$ なので $g(x)=0$ の時のみ成立する。
つまり $p_1(x)-p_2(x)=0$
となり $P_3(x)$ は存在するとしたら一つにかぎる。

$\int_{-1}^{1} P_3(x)f(x)\,dx=0$ は任意の $f(x)$ 対して成立するので
すくなくとも $f(x)=1, f(x)=x, f(x)=x^2$ について成立する必要がある。
$f(x)=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^3+ax^2+bx+c\,dx &= \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2a}{3}+2c=0
\end{aligned}
$$

$f(x)=x$ のとき

$$\int_{-1}^{1} x^4+ax^3+bx^2+cx\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5+\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{2}{5}+\frac{2b}{3} = 0$$

$f(x)=x^2$ のとき

$$\int_{-1}^{1} x^5+ax^4+bx^3+cx^2\,dx = \left[\frac{1}{6}x^6+\frac{a}{5}x^5+\frac{b}{4}x^4+\frac{c}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{a}{5}+\frac{c}{3} = 0$$

以上より $b=\frac{-3}{5}, a=c=0$ が必要。
$P_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x$ とすると
$P_3(x)f(x)=dx^5+ex^4+fx^3-\frac{3dx^3}{5}-\frac{3ex^2}{5}-\frac{3fx}{5}$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} dx^5+ex^4+fx^3-\frac{3dx^3}{5}-\frac{3ex^2}{5}-\frac{3fx}{5}\,dx \\
&= \left[\frac{d}{6}x^6+\frac{e}{5}x^5+\frac{f}{4}x^4-\frac{3d}{20}x^4-\frac{3e}{15}x^3-\frac{3f}{10}x^2\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{d}{6}+\frac{e}{5}+\frac{f}{4}-\frac{3d}{20}-\frac{3e}{15}-\frac{3f}{10}-\frac{d}{6}+\frac{e}{5}-\frac{f}{4}+\frac{3d}{20}-\frac{3e}{15}+\frac{3f}{10} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり、この式は条件を満たす。
前述の通り存在するとしたら一つに限るので

$$P_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x$$

証明終了