京都大学　1979 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

$f(x) = 1 + 2\cos x + 3\sin x$ とする．すべての x に対して $af(x) + bf(x-c) = 1$ が成り立つように，定数 a，b，c を定めよ．

解答

$g(x) = a(1 + 2\cos x + 3\sin x) + b(1 + 2\cos(x-c) + 3\sin(x-c)) = 1$ がすべての x について成り立つ。
したがって

$$\begin{aligned}
&a(1 + 2\cos x + 3\sin x) + b(1 + 2\cos(x-c) + 3\sin(x-c)) \\
&= a + 2a\cos x + 3a\sin x + b + 2b\cos(x-c) + 3b\sin(x-c) \\
&= a + b + 2a\cos x + 3a\sin x + 2b(\cos x\cos c + \sin x\sin c) + 3b(\sin x\cos c - \cos x\sin c) \\
&= a + b + (2a + 2b\cos c - 3b\sin c)\cos x + (3a + 2b\sin c + 3b\cos c)\sin x \\
&= 1
\end{aligned}$$

これが任意の x について成り立つためには
少なくとも $x = 0, \pi/2, -\pi, -\pi/2$ の時成り立つ必要がある。
それぞれを計算すると
$g(0) = 3a + b - 3b\sin c + 2b\cos c = 1$
$g(\pi/2) = 4a + b + 2b\sin c + 3b\cos c = 1$
$g(\pi) = -a + b + 3b\sin c - 2b\cos c = 1$
$g(-\pi/2) = -2a + b - 2b\sin c - 3b\cos c = 1$

$4g(0) - 3g(\pi/2) = b(1 - \cos c - 18\sin c) = 1$
$2g(\pi) - g(-\pi/2) = b(1 - \cos c + 8\sin c) = 1$
これらを同時に満たすには $\sin c = 0$
$\sin^2 c + \cos^2 c = 1$ より $\cos c = \pm 1$
この条件で再度計算しなおすと

$$\begin{aligned}
g(0) &= 3a + b + 2b\cos c = 3a + b(1 + 2\cos c) = 3a + b(1 \pm 2) = 1 \\
g(\pi/2) &= 4a + b + 3b\cos c = 4a + b(1 + 3\cos c) = 4a + b(1 \pm 3) = 1 \\
g(\pi) &= -a + b - 2b\cos c = -a + b(1 - 2\cos c) = -a + b(1 \mp 2) = 1 \\
g(-\pi/2) &= -2a + b - 3b\cos c = -2a + b(1 - 3\cos c) = -2a + b(1 \mp 3) = 1
\end{aligned}$$

$\cos c = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
3a + 3b &= 1 \\
4a + 4b &= 1 \\
-a - b &= 1 \\
-2a - 2b &= 1
\end{aligned}$$

が同時に成り立つ必要があるが
$3a + 3b = 4a + 4b$ より
$a + b = 0$
しかし $-a - b = 1$ より $a + b = -1$ となり成立しない。

$\cos c = -1$ のとき

$$\begin{aligned} 3a - b &= 1 \\ 4a - 2b &= 1 \\ -a + 3b &= 1 \\ -2a + 4b &= 1 \end{aligned}$$

となり
$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ で成立する。
以上より
a, b, c はすくなくとも $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, (2n+1)\pi$ である。
逆に a, b, c がこの値だとすると

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}(1 + 2\cos x + 3\sin x) + \frac{1}{2}(1 + 2\cos(x - (2n+1)\pi) + 3\sin(x - (2n+1)\pi)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2\cos x + 3\sin x + 1 + 2\cos(x - \pi) + 3\sin(x - \pi)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2\cos x + 3\sin x + 1 - 2\cos x - 3\sin x) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

以上より

$$(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, (2n+1)\pi) \ (n \text{ は整数})$$

証明終了