京都大学　1979 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

1. 変数 t が $t > 0$ の範囲を動くとき

$$f(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t + \frac{1}{t} + 1}, \quad g(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t + \frac{1}{t} + 1}$$

について，$f(t)$ の最小値は $2+\sqrt{3}$，$g(t)$ の最大値は $2-\sqrt{3}$ であることを示せ.

2. $a = \sqrt{x^2+xy+y^2}$，$b = p\sqrt{xy}$，$c = x + y$ とおく．任意の正数 x，y（>0）に対して a，b，c を 3 辺の長さとする三角形がつねに存在するように，p の値の範囲を定めよ.

解答

$f(t) = \sqrt{t} + \dfrac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t + \dfrac{1}{t} + 1}$

について

$$f'(t) = \frac{(t-1)\left(t\sqrt{\dfrac{t^2+t+1}{t}} + t^{\frac{3}{2}} + \sqrt{t}\right)}{2t^{\frac{5}{2}}\sqrt{\dfrac{t^2+t+1}{t}}}$$

(t-1) 以外の項はすべて $t > 0$ の範囲で正なので、$f'(t)$ の符号は $(t-1)$ と一致する。

したがって、

$f'(t)$ は $t < 1$ で単調減少

$f'(t)$ は $t > 1$ で単調増加

よって $t = 1$ において最小値をとる。

よって最小値は

$$f(1) = 1 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

$$g'(t) = \frac{(t-1)\left(t\sqrt{\dfrac{t^2+t+1}{t}} - t^{\frac{3}{2}} - \sqrt{t}\right)}{2t^{\frac{5}{2}}\sqrt{\dfrac{t^2+t+1}{t}}}$$

$$\begin{aligned}
&t\sqrt{\frac{t^2+t+1}{t}} - t^{\frac{3}{2}} - \sqrt{t} \\
&= \sqrt{t}\sqrt{t^2+t+1} - t\sqrt{t} - \sqrt{t} \\
&= \sqrt{t}(\sqrt{t^2+t+1} - (t+1)) \\
&= \sqrt{t}(\sqrt{t^2+t+1} - \sqrt{(t+1)^2}) \\
&= \sqrt{t}(\sqrt{t^2+t+1} - \sqrt{t^2+2t+1})
\end{aligned}$$

$t > 0$ より

$t^2 + t + 1 < t^2 + 2t + 1$

よって

$g'(x)$ の符号は $(t-1)$ と逆になる。

よって

$t<1$ の範囲で $g'(x)>0$
$t>1$ の範囲で $g'(x)<0$
したがって $g(x)$ は $t=1$ で最大値をとる。
よって最大値は

$$g(1)=1+1-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$$

2.
$a=\sqrt{x^2+xy+y^2}$, $b=p\sqrt{xy}$, $c=x+y$ とおく．任意の正数 x, y（>0）に対して a, b, c を 3 辺の長さとする三角形がつねに存在するように，p の値の範囲を定めよ．
三角形が存在するためには、三角不等式が成立する必要がある。
$a>0, b>0, c>0$ で $a+b>c, b+c>a, c+a>b$
これが成立する範囲では三角形を構成することができる。
$x,y>0$ より $a,b,c>0$ は自明
よって次の三つの不等式が成立すればいい
$b>c-a, b>a-c, b<c+a$
書き直すと

$$p\sqrt{xy}=b>c-a=x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2} \tag{1}$$
$$p\sqrt{xy}=b>a-c=\sqrt{x^2+xy+y^2}-(x+y) \tag{2}$$
$$p\sqrt{xy}=b<a+c=x+y+\sqrt{x^2+xy+y^2} \tag{3}$$

となる。

(1) が成立するためには
$p>\dfrac{x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}}$
$\dfrac{x}{y}=t$ とすると

$$\begin{aligned}
&\frac{x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}}\\
&=\frac{x}{\sqrt{xy}}+\frac{y}{\sqrt{xy}}-\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}}\\
&=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{x^2}{xy}+\frac{xy}{xy}+\frac{y^2}{xy}}\\
&=\sqrt{t}+\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}
\end{aligned}$$

1. より
$\sqrt{t}+\sqrt{\dfrac{1}{t}}-\sqrt{t+\dfrac{1}{t}+1}$ の最大値は
$2-\sqrt{3}$ なので
$p>2-\sqrt{3}$ であれば、この不等式は常に成立する。

(2) が成立するためには
$p>\dfrac{\sqrt{x^2+xy+y^2}-(x+y)}{\sqrt{xy}}$
$x^2+xy+y^2<(x+y)^2$ より

$\sqrt{x^2+xy+y^2}-(x+y)<0$
$p>0$ であればこの不等式は常に成立する。

(3) が成立するためには

$$
\begin{aligned}
p &< \frac{x}{\sqrt{xy}}+\frac{y}{\sqrt{xy}}+\sqrt{\frac{x^2}{xy}+\frac{xy}{xy}+\frac{y^2}{xy}} \\
&= \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}} \\
&= \sqrt{t}+\sqrt{\frac{1}{t}}+\sqrt{\frac{1}{t}+1+t}
\end{aligned}
$$

1. より
$\sqrt{t}+\sqrt{\frac{1}{t}}+\sqrt{\frac{1}{t}+1+t}$ の最小値は
$2+\sqrt{3}$ なので
$p<2+\sqrt{3}$ であれば常にこの不等式は成立する。
以上より

$$2-\sqrt{3}<p<2+\sqrt{3}$$

証明終了