京都大学　1979 年　入学試験　理系数学　問題 4

問題

2 人の人が 1 つのサイコロを 1 回ずつふり，大きい目を出した方を勝ちとすることにした．ただし，このサイコロは必ずしも正しいものではなく，k の目のでる確率は p_k である（$k=1$，2，3，4，5，6）．このとき

1. 引き分けになる確率 P を求めよ．
2. $P \geqq \dfrac{1}{6}$ であることを示せ．また，$P=\dfrac{1}{6}$ ならば，$p_k=\dfrac{1}{6}$ である（$k=1$，2，3，4，5，6）ことを示せ．

解答

1.
二人の人がおなじ目を出した時に引き分けとなる。
したがって A さんが出した目を l $(l=1,2,3,4,5,6)$ とすると B さんが l を出すときの確率が求める確率となる。
A さんが l を出す確率は p_l そのとき、B さんが l を出す確率も p_l なので
確率は $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} {p_k}^2$
となる。

$$P=\sum_{k=1}^{6} {p_k}^2$$

2.
$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ なので

$$\begin{aligned}P &= {p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2+{p_4}^2+{p_5}^2+{p_6}^2 \\ &= (p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6) \\ &\quad -2(p_1p_2+p_1p_3+p_1p_4+p_1p_5+p_1p_6+p_2p_3+p_2p_4+p_2p_5+p_2p_6 \\ &\quad +p_3p_4+p_3p_5+p_3p_6+p_4p_5+p_4p_6+p_5p_6)\end{aligned}$$

相加平均 $\geqq$ 相乗平均より
$p_kp_l \leqq (\dfrac{p_k+p_l}{2})^2$
よって

$$
\begin{aligned}
&p_1p_2+p_1p_3+p_1p_4+p_1p_5+p_1p_6+p_2p_3+p_2p_4+p_2p_5+p_2p_6+p_3p_4+p_3p_5+p_3p_6+p_4p_5+p_4p_6+p_5p_6\\
&\leqq \frac{1}{4}((p_1+p_2)^2+(p_1+p_3)^2+(p_1+p_4)^2+(p_1+p_5)^2+(p_1+p_6)^2\\
&\quad+(p_2+p_3)^2+(p_2+p_4)^2+(p_2+p_5)^2+(p_2+p_6)^2\\
&\quad+(p_3+p_4)^2+(p_3+p_5)^2+(p_3+p_6)^2\\
&\quad+(p_4+p_5)^2+(p_4+p_6)^2+(p_5+p_6)^2)\\
&=\frac{1}{4}(p_1^2+p_2^2+2p_1p_2+p_1^2+p_3^2+2p_1p_3+p_1^2+p_4^2+2p_1p_4+p_1^2+p_5^2+2p_1p_5+p_1^2+p_6^2+2p_1p_6\\
&\quad+p_2^2+p_3^2+2p_2p_3+p_2^2+p_4^2+2p_2p_4+p_2^2+p_5^2+2p_2p_5+p_2^2+p_6^2+2p_2p_6\\
&\quad+p_3^2+p_4^2+2p_3p_4+p_3^2+p_5^2+2p_3p_5+p_3^2+p_6^2+2p_3p_6\\
&\quad+p_4^2+p_5^2+2p_4p_5+p_4^2+p_6^2+2p_4p_6+p_5^2+p_6^2+2p_5p_6)\\
&=\frac{1}{4}(5(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2)\\
&\quad+2(p_1p_6+p_1p_5+p_1p_4+p_1p_3+p_1p_2+p_2p_3+p_2p_4+p_2p_5+p_2p_6\\
&\quad+p_3p_4+p_3p_5+p_3p_6+p_4p_5+p_4p_6+p_5p_6))
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
&2(p_1p_2+p_1p_3+p_1p_4+p_1p_5+p_1p_6+p_2p_3+p_2p_4+p_2p_5+p_2p_6+p_3p_4+p_3p_5+p_3p_6+p_4p_5+p_4p_6+p_5p_6)\\
&\leqq 5(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2)
\end{aligned}
$$

したがって

$P \geqq 1-5P$

よって

$6P \geqq 1$

$$P \geqq \frac{1}{6}$$

またこの不等式が一致するためには $p_1=p_2, p_2=p_3, p_3=p_4, p_4=p_5, p_5=p_6$ がすべて成立するとき

よって

$$p_k=\frac{1}{6}$$

証明終了