

問題

中心が O である定円の周上に相異なる 6 つの定点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ がある. このとき

1. $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} = \vec{OH}$ となるように点 H をとれば, 点 H は $\triangle A_1A_2A_3$ の垂心であることを示せ.
2. 6 点 A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) のうちから 3 点を任意にえらぶ. えらんだ 3 点を頂点とする三角形の垂心と, 残りの 3 点を頂点とする三角形の重心とを通る直線は, 3 点のえらびかたに無関係な一定の点を通ることを示せ.

注 三角形の各頂点からその対辺にひいた 3 つの垂線は 1 点で交わる. この交点をその三角形の垂心という.
解答

点 H が三角形 $A_1A_2A_3$ の垂心であるためには

A_1H と A_2A_3 が直交し

A_2H と A_1A_3 が直交し

A_3H と A_1A_2 が直交すればよい

$$\vec{A_1H} = \vec{OH} - \vec{OA_1} = \vec{OA_2} + \vec{OA_3}$$

A_2, A_3 はともに円周上の点なので

$$|\vec{OA_2}| = |\vec{OA_3}|$$

よって

$$\vec{OH} = \vec{OA_2} + \vec{OA_3} \text{ とすると}$$

点 OA_2A_3 4 辺がすべて等しいので菱形になる。

したがって

対角線 OV と A_2A_3 は直交する。

したがって A_1H と A_2A_3 が直交する。

同様に A_2H と A_1A_3 も直交し

A_3H と A_1A_2 も直交する。

したがって H は三角形 $A_1A_2A_3$ の垂心である。

2.

6 点 A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) のうちから 3 点を任意にえらぶ. えらんだ 3 点を頂点とする三角形の垂心と, 残りの 3 点を頂点とする三角形の重心とを通る直線は, 3 点のえらびかたに無関係な一定の点を通ることを示せ. 始めに選んだ 3 点を B_1, B_2, B_3 とする

この垂心を H とする。

$$\text{つまり } \vec{OH} = \vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \vec{OB_3}$$

残りの 3 点を B_4, B_5, B_6 とする

この重心を G とすると

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OB_4} + \vec{OB_5} + \vec{OB_6}}{3}$$

直線 $\vec{GH}$ 上の点 T を考えると

$$\vec{OT} = t(\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \vec{OB_3}) + (1-t)\frac{\vec{OB_4} + \vec{OB_5} + \vec{OB_6}}{3} \text{ と表される。}$$

$t = \frac{1}{4}$ のとき

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3}) + \frac{3}{4} \frac{\overrightarrow{OB_4} + \overrightarrow{OB_5} + \overrightarrow{OB_6}}{3} \\
&= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB_4} + \overrightarrow{OB_5} + \overrightarrow{OB_6}) \\
&= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_4} + \overrightarrow{OB_5} + \overrightarrow{OB_6})
\end{aligned}$$

となり T は選び方に関係なく一定の点となる。

よって GH は一定の点を通る。

証明終了