京都大学　1979 年　入学試験　理系数学　問題 6

問題

平面上に動点 P がある．時刻 t（$t \geqq 0$）のときの P の座標 (x, y) は次の式で与えられる．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ただし，a，b，c_1，c_2 は定数であって，$a > 0$，$b > 0$ であり，定点 $\mathrm{C}(c_1, c_2)$ は原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ とは異なるものとする．このとき

1. 動点 P の速度ベクトルと動径 OP のなす角は一定であることを示せ．
2. 動点 P が C を出発したのち，線分 OC と最初に交わる点を C_1，第 2 回目に交わる点を C_2 とする．一般に，第 k 回目に OC と交わる点を C_k とする．P の経過した道のり $\overset{\frown}{\mathrm{CC}_1}$，$\overset{\frown}{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}$，$\cdots$，$\overset{\frown}{\mathrm{C}_k\mathrm{C}_{k+1}}$，$\cdots$ は等比数列であることを示せ．

解答

C が x 上の点 $(l, 0)$ に来るように回転を行っても、距離や角は影響を受けないので
C$= (l, 0)$ とする。$(l = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2})$
時刻 t における x, y の値を x_t, y_t
P における速度ベクトルを $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$ とする
$x_t = e^{-at}(l \cos bt)$,$y_t = e^{-at}(l \sin bt)$
$v_x = \dfrac{dx_t}{dt}$,$v_y = \dfrac{dy_t}{dt}$
v_x, v_y を計算すると

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d}{dt}\{e^{-at}(l \cos bt)\} \\ &= l\frac{d}{dt}\{e^{-at} \cos bt\} \\ &= l(-ae^{-at} \cos bt - be^{-at} \sin bt) \\ &= e^{-at}(-la \cos bt - lb \sin bt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{d}{dt}\{e^{-at}(l \sin bt)\} \\ &= l\frac{d}{dt}\{e^{-at} \sin bt\} \\ &= e^{-at}(-la \sin bt + lb \cos bt) \end{aligned}$$

以上より
$\overrightarrow{v} = (-le^{-at}(a \cos bt + b \sin bt), -le^{-at}(a \sin bt - b \cos bt))$
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (le^{-at} \cos bt, le^{-at} \sin bt)$
$|\overrightarrow{v}| = le^{-at}\sqrt{a^2 + b^2}$,$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = le^{-at}$ なので
それぞれの単位ベクトルを $\overrightarrow{v}_e$,$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_e$ とすると
$\overrightarrow{v}_e = \dfrac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = (\dfrac{(a \cos bt + b \sin bt)}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \dfrac{(a \sin bt - b \cos bt)}{\sqrt{a^2 + b^2}})$
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_e = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = (\cos bt, \sin bt)$

$\overrightarrow{v}_e = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OP}}_e$ となる。

$\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ なので

$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta, \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta$ とする回転行列に等しい。

またこれは t には依存しないので OP と $\overrightarrow{v}$ のなす角は一定。

2.

P が OC を横切るのは $bt = 2\pi$ となったとき

したがって

$\mathrm{C}_k\overset{\frown}{\mathrm{C}_{k+1}}$ は t が $\dfrac{2k\pi}{b}$ から $\dfrac{2(k+1)\pi}{b}$ まで変わる間に移動する距離。

よってその距離は

$\displaystyle\int_{\frac{2(k)\pi}{b}}^{\frac{2(k+1)\pi}{b}} \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}\,dt$

これを D_k とおくと

$$
\begin{aligned}
D_k &= \int_{\frac{2(k)\pi}{b}}^{\frac{2(k+1)\pi}{b}} \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}\,dt \\
&= \int_{\frac{2(k)\pi}{b}}^{\frac{2(k+1)\pi}{b}} e^{-at} l\sqrt{(a\cos bt + b\sin bt)^2 + (a\sin bt - b\cos bt)^2}\,dt \\
&= \int_{\frac{2(k)\pi}{b}}^{\frac{2(k+1)\pi}{b}} e^{-at} l\sqrt{a^2+b^2}\,dt \\
&= l\sqrt{a^2+b^2}\int_{\frac{2(k)\pi}{b}}^{\frac{2(k+1)\pi}{b}} e^{-at}\,dt \\
&= l\sqrt{a^2+b^2}\Big[-ae^{-at}\Big]_{\frac{2(k)\pi}{b}}^{\frac{2(k+1)\pi}{b}}\,dt \\
&= l\sqrt{a^2+b^2}(-ae^{-a\frac{2(k)\pi}{b}} + ae^{-a\frac{2(k+1)\pi}{b}}) \\
&= al\sqrt{a^2+b^2}(e^{-a\frac{2(k+1)\pi}{b}} - e^{-a\frac{2(k)\pi}{b}}) \\
&= al\sqrt{a^2+b^2}(e^{-a\frac{2(k)\pi}{b}}e^{-a\frac{2(1)\pi}{b}} - e^{-a\frac{2(k)\pi}{b}}) \\
&= al\sqrt{a^2+b^2}(e^{-a\frac{2\pi}{b}} - 1)e^{-a\frac{2(k)\pi}{b}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{D_{k+1}}{D_k} &= \frac{al\sqrt{a^2+b^2}(e^{-a\frac{2\pi}{b}} - 1)e^{-a\frac{2(k+1)\pi}{b}}}{al\sqrt{a^2+b^2}(e^{-a\frac{2\pi}{b}} - 1)e^{-a\frac{2(k)\pi}{b}}} \\
&= \frac{e^{-a\frac{2(k+1)\pi}{b}}}{e^{-a\frac{2(k)\pi}{b}}} \\
&= e^{-a\frac{2(k+1)\pi}{b} + a\frac{2(k)\pi}{b}} \\
&= e^{-a\frac{2\pi}{b}}
\end{aligned}
$$

となり一定

したがって D_k は等比数列

証明終了