京都大学　1980年　入学試験　文系数学　問題2

問題

凸四辺形ABCDの辺AB，BC，CD，DA上をそれぞれ一定の速さで動く動点P，Q，R，Sが時刻 $t=0$ のときそれぞれA，B，C，Dを出発し，時刻 $t=1$ のときそれぞれB，C，D，Aに達するものとする．四辺形PQRSの面積を t（$0 \leqq t \leqq 1$）の関数として表せ．またこの関数の最小値について調べよ．

解答

凸四辺形なので線分PQ,QR,RS,SPはすべて辺上の点を結ぶ線分なので内部にある。
よって四辺AB,BC,CD,DAの長さをそれぞれ l, m, n, o
A,B,C,Dの角を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
四辺形ABCDの面積を T とすると
四辺形PQRSの面積 V は四辺形ABCDの面積から三角形APS, 三角形BQP, 三角形CRQ, 三角形DSRを除いたものなので
$V = T - \frac{1}{2}(tl(1-t)o\sin\alpha + tm(1-t)l\sin\beta + tn(1-t)m\sin\gamma + to(1-t)n\sin\delta)$ と表せる。
また三角形ABDの面積が $\frac{1}{2}lo\sin\alpha$ で
$T = \frac{1}{2}(\triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCA} + \triangle\mathrm{CDB} + \triangle\mathrm{DAC})$ だから
$T = \frac{1}{4}(lo\sin\alpha + lm\sin\beta + mn\sin\gamma + on\sin\delta)$ である。
したがって

$$
\begin{aligned}
V &= T - \frac{1}{2}(tl(1-t)o\sin\alpha + tm(1-t)l\sin\beta + tn(1-t)m\sin\gamma + to(1-t)n\sin\delta) \\
&= T - \frac{1}{2}(tlo\sin\alpha - t^2lo\sin\alpha + tml\sin\beta - t^2ml\sin\beta + tnm\sin\gamma - t^2nm\sin\gamma + ton\sin\delta - t^2on\sin\delta) \\
&= T - \frac{1}{2}(t(lo\sin\alpha + ml\sin\beta + nm\sin\gamma + on\sin\delta) - (lo\sin\alpha + ml\sin\beta + nm\sin\gamma + on\sin\delta)) \\
&= T - \frac{1}{2}(4Tt - 4Tt^2) \\
&= T(1 - 2t + 2t^2)
\end{aligned}
$$

となり、四辺形PQRSの面積は四辺形ABCDの面積を T とすると

$$T(2t^2 - 2t + 1)$$

$f(t) = 2t^2 - 2t + 1$ とすると
$f(t)$ は下に凸の二次式なので
$f'(t) = 4t - 2$ より
$t = \frac{1}{2}$ のとき最小となりその値は
$f(\frac{1}{2}) = 1 - 2\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ よって四辺形PQRSの面積は $t = \frac{1}{2}$ のとき最小となり
四辺形ABCDの面積の二分の1となる。

証明終了