京都大学　1980 年　入学試験　文系数学　問題 3

問題

$f(x)$ が n 次の多項式で $n \geqq 2$ であるとき,

$$f(x)+f(x+1)-2\int_0^1 f(x+t)\,dt$$

は $n-2$ 次であることを示せ.

解答

$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+g(x)(a\neq 0, g(x)$ は $n-3$ 次以下の多項式)
とすると

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x+t)\,dt &= \int_x^{x+1} f(x)\,dx \\
&= \int_x^{x+1} ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+g(x)\,dx \\
&= \left[\frac{a}{n+1}x^{n+1}+\frac{b}{n}x^n+\frac{c}{n-1}x^{n-1}\right]_x^{x+1} \\
&\quad +\int_x^{x+1} g(x)\,dx \\
&= \frac{a}{n+1}(x+1)^{n+1}+\frac{b}{n}(x+1)^n+\frac{c}{n-1}(x+1)^{n-1} \\
&\quad -(\frac{a}{n+1}x^{n+1}+\frac{b}{n}x^n+\frac{c}{n-1}x^{n-1}) \\
&\quad +\int_x^{x+1} g(x)\,dx \\
&= \frac{a}{n+1}((x+1)^{n+1}-x^{n+1}) \\
&\quad +\frac{b}{n}((x+1)^n-x^n) \\
&\quad +\frac{c}{n-1}((x+1)^{n-1}-x^{n-1}) \\
&\quad +\int_x^{x+1} g(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((x+1)^n-x^n) &= x^n+\binom{1}{n}x^n+\binom{2}{n}x^{n-1}+\binom{3}{n}x^{n-2} \\
&\quad +\cdots+\binom{n-1}{n}x+1-x^n \\
&= \binom{1}{n}x^{n-1}+\binom{2}{n}x^{n-2}+\binom{3}{n}x^{n-3} \\
&\quad +\cdots+\binom{n-1}{n}x+1 \\
&= nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}+\cdots+nx+1 \\
&= nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+h_n(x)
\end{aligned}$$

$h_n(x)=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}+\cdots+nx+1$ とする。

より

$$\frac{a}{n+1}((x+1)^{n+1}-x^{n+1})+\frac{b}{n}((x+1)^{n}-x^{n})+\frac{c}{n-1}((x+1)^{n-1}-x^{n-1})+\int_x^{x+1} g(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{a}{n+1}((n+1)x^{n}+\frac{(n+1)n}{2}x^{n-1}+h_{n+1})\\
&\quad+\frac{b}{n}(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+h_{n})\\
&\quad+\frac{c}{n-1}((n-1)x^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}+h_{n-1})\\
&\quad+\int_x^{x+1} g(x)\,dx\\
&=ax^{n}+a\frac{n}{2}x^{n-1}+a\frac{1}{n+1}h_{n+1}\\
&\quad+bx^{n-1}+b\frac{(n-1)}{2}x^{n-2}+b\frac{1}{n}h_{n}\\
&\quad+cx^{n-2}+c\frac{(n-2)}{2}x^{n-3}+c\frac{1}{n-1}h_{n-1}\\
&\quad+\int_x^{x+1} g(x)\,dx\\
&=ax^{n}\\
&\quad+a\frac{n}{2}x^{n-1}+bx^{n-1}\\
&\quad+b\frac{(n-1)}{2}x^{n-2}+cx^{n-2}\\
&\quad+c\frac{(n-2)}{2}x^{n-3}\\
&\quad+a\frac{1}{n+1}h_{n+1}+b\frac{1}{n}h_{n}+c\frac{1}{n-1}h_{n-1}\\
&\quad+\int_x^{x+1} g(x)\,dx\\
&=ax^{n}\\
&\quad+(a\frac{n}{2}+b)x^{n-1}\\
&\quad+(b\frac{(n-1)}{2}+c)x^{n-2}\\
&\quad+c\frac{(n-2)}{2}x^{n-3}\\
&\quad+a\frac{1}{n+1}h_{n+1}+b\frac{1}{n}h_{n}+c\frac{1}{n-1}h_{n-1}\\
&\quad+\int_x^{x+1} g(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
((x+1)^n+x^n) &= x^n+\binom{1}{n}x^n+\binom{2}{n}x^{n-1}+\binom{3}{n}x^{n-2} \\
&\quad +\cdots+\binom{n-1}{n}x+1+x^n \\
&= 2x^n+\binom{1}{n}x^{n-1}+\binom{2}{n}x^{n-2}+\binom{3}{n}x^{n-3} \\
&\quad +\cdots+\binom{n-1}{n}x+1 \\
&= 2x^n+nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}+\cdots+nx+1 \\
&= 2x^n+nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+h_n(x)
\end{aligned}
$$

$h_n(x)=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}+\cdots+nx+1$ とする。

$$
\begin{aligned}
f(x)+f(x+1) &= ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+g(x)+a(x-1)^n+b(x+1)^{n-1}+c(x+1)^{n-2}+g(x+1) \\
&= +a((x-1)^n+x^n)+b(x^{n-1}+(x+1)^{n-1})+c(x^{n-2}+(x+1)^{n-2})+g(x)+g(x+1) \\
&= +a(2x^n+nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+h_n(x)) \\
&\quad +b(2x^{n-1}+nx^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}+h_{n-1}(x)) \\
&\quad +c(2x^{n-2}+nx^{n-3}+\frac{(n-2)(n-3)}{2}x^{n-4}+h_{n-2}(x)) \\
&\quad +g(x)+g(x)+g(x+1) \\
&= +2ax^n+anx^{n-1}+a\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+ah_n(x) \\
&\quad +2bx^{n-1}+b(n-1)x^{n-2}+b\frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}+bh_{n-1}(x) \\
&\quad +2cx^{n-2}+c(n-2)x^{n-3}+c\frac{(n-2)(n-3)}{2}x^{n-4}+ch_{n-2}(x) \\
&\quad +g(x)+g(x+1) \\
&= +2ax^n \\
&\quad +anx^{n-1}+2bx^{n-1} \\
&\quad +a\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+b(n-1)x^{n-2}+2cx^{n-2} \\
&\quad +b\frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}+c(n-2)x^{n-3}+c\frac{(n-2)(n-3)}{2}x^{n-4}+ah_n(x)+bh_{n-1}(x)+ch_{n-2}(x) \\
&\quad +g(x)+g(x+1) \\
&= +2ax^n \\
&\quad +(an+2b)x^{n-1} \\
&\quad +(a\frac{n(n-1)}{2}+b(n-1)+2c)x^{n-2} \\
&\quad +b\frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}+c(n-2)x^{n-3}+c\frac{(n-2)(n-3)}{2}x^{n-4}+ah_n(x)+bh_{n-1}(x)+ch_{n-2}(x) \\
&\quad +g(x)+g(x+1)
\end{aligned}
$$

$g(x), \int_x^{x+1} g(x)\,dt$ の係数は $n-3$ 次以下なので

$f(x)+f(x+1)$ の

n 次の係数は $2a$

$n-1$ 次の係数は $an+2b$

$n-2$ 次の係数は $a\dfrac{n(n-1)}{2}+b(n-1)+2c$
$\int_0^1 f(x+t)\,dt$ の
n 次の係数は a
$n-1$ 次の係数は $a\dfrac{n}{2}+b$
$n-2$ 次の係数は $(b\dfrac{(n-1)}{2}+c)$
となり
$f(x)+f(x+1)-2\int_0^1 f(x+t)\,dt$ の
n 次の係数は $2a-2a=0$
$n-1$ 次の係数は $an+2b-2(a\dfrac{n}{2}+b)=0$
$n-2$ 次の係数は $a\dfrac{n(n-1)}{2}+b(n-1)+2c-2(b\dfrac{(n-1)}{2}+c)=a\dfrac{n(n-1)}{2}$
となり
$a\neq 0, n \geqq 2$ なので $n-2$ 次の係数は 0 ではない
よって $f(x)+f(x+1)-2\int_0^1 f(x+t)\,dt$ は $n-2$ 次

証明終了