京都大学　1980 年　入学試験　文系数学　問題 5

問題

互いに異なる n 個（$n \geqq 3$）の正の数の集合 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ が次の性質をもつという.

「S から相異なる要素 a_i，a_j をとれば $a_i - a_j$，$a_j - a_i$ の少なくとも一方は必ず S に属する」

このとき，a_1，a_2，$\cdots$，a_n の順序を適当に変えれば等差数列になることを示せ.

解答

まず、a_1，a_2，$\cdots$，a_n を大小の順にならべ変えて、値の小さい方から b_1，b_2，$\cdots$，b_n とする。
順番を適当にかえれば等差数列になることをしめすためにはこの数列について考えてもよい。
このとき当然これらの数の最小は b_1 であり、最大は b_n である。
$b_1, b_2, \cdots, b_n$ は大きさの順にならべて、かつそれぞれの要素は異なるので
$b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_n$ となる。
任意の $i(1 \leqq i \leqq n-1)$ について $b_i < b_{i+1}$ なので $b_i - b_{i+1} < 0$
しかし b_i はすべて正なので $b_i - b_{i+1}$ は S の要素とはなり得ない
しかし $b_i - b_{i+1}$ または $b_{i+1} - b_i$ のいずれかが S の要素なので $b_{i+1} - b_i$ が S の要素である。
S の要素はすべて b_1 と等しいか大きいので $b_{i+1} - b_i \geqq b_1$
したがって $b_{i+1} - b_1 \geqq b_i$
$b_{i+1} - b_1$ も S の要素でなければならないが $b_1 > 0$ なので
$b_{i+1} - b_1 < b_{i+1}$ となり
$b_{i+1} - b_1$ は $b_{i+1} > b_{i+1} - b_1 \geqq b_i$ となる
しかし b_{i+1} と b_i の間には要素は無いので $b_{i+1} - b_1 = b_i$
これが任意の i について成り立つので b_i は公差 b_1 の等差数列
よってこれ以上並べ変えるまでもなく、a_i を大きさの順に並べ変えた数列は等差数列となる。
つまり a_i を適当に並べ変えれば等差数列となる。
証明終了