京都大学　1980 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

放物線 $y = ax^2 + bx$ で，次の性質をもつものを考える．

① $a < 0$，$b > 0$
② 放物線の頂点は直線 $y = -2x + 5$ 上にある．

このような放物線のうち，それと x 軸とが囲む面積が最大になるのは，b がどのような値をとるときか．また，そのときの面積を求めよ．

解答

$y = ax^2 + bx$ を微分すると $y' = 2ax + b$ となる。
頂点の x の値は $y' = 0$ の時の x の値なので、$2ax + b = 0$ より $x = -\dfrac{b}{2a}$
その時の y の値は頂点が $y = -2x + 5$ 上にあることから、$y = \dfrac{b}{a} + 5$ となる。
頂点は当然放物線上の点でもあるので、$y = a(\dfrac{b}{2a})^2 - b\dfrac{b}{2a}$ も同時に成立しなければならない。
したがって $\dfrac{b}{a} + 5 = a(\dfrac{b}{2a})^2 - b\dfrac{b}{2a}$ が成立する。
これを整理すると $b^2 + 4b + 20a = 0$ となる。a を b で表すと $a = -\dfrac{b(b+4)}{20}$
したがって、放物線の式は $y = -\dfrac{b(b+4)}{20}x^2 + bx$ となる。
この放物線と x 軸の囲む部分の面積は、放物線と x 軸の交点つまり $y = 0$ となる x の値の範囲を積分したものになる
$y = 0$ となる x の値は $-\dfrac{b(b+4)}{20}x^2 + bx = -\dfrac{bx(x(b+4) - 20)}{20} = 0$ より $x = 0, \dfrac{20}{b+4}$ となる。したがって、面積は

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{20}{b+4}} -\frac{b(b+4)}{20}x^2 + bx\,dx \\
&= \left[-\frac{b(b+4)}{60}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right]_0^{\frac{20}{b+4}} \\
&= -\frac{b(b+4)}{60}(\frac{20}{b+4})^3 + \frac{b}{2}(\frac{20}{b+4})^2 \\
&= \frac{200b}{3(b+4)^2}
\end{aligned}$$

S を b で微分すると

$$\frac{dS}{db} = -\frac{200(b-4)}{3(b+4)^3}$$

となる。分母は $b > 0$ の範囲で常に正、分子は $0 < b < 4$ の範囲で正　$b > 4$ の範囲で負となるので、S は上に凸となり、$b = 4$ の点で最大となる。以上より、

$$b = 4$$

の点で最大となり、その時の面積は

$$\frac{25}{6}$$