京都大学　1980 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

空間の 3 点 A，B，C の組で，次の条件を満たすものを考える．

① A，B，C は平面 $x+y+z=1$ 上にある．
② A の座標が (l,m,n) であれば，B，C の座標はそれぞれ (m,n,l)，(n,l,m) である．
③ ベクトル $\vec{\mathrm{OA}}$，$\vec{\mathrm{OB}}$ は直交する（ただし，$\mathrm{O}=(0,0,0)$）．

このとき，そのような A，B，C のとり方に関せず，次の三つが成り立つことを示せ．

1. A，B，C は定円上にある．
2. 四面体 OABC の体積は一定である．
3. BC，CA，AB，OA，OB，OC の中点をそれぞれ L，M，N，P，Q，R とすれば 6 点 L，M，N，P，Q，R は定球面上にある

解答

1.
②より $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ なので ABC は O を中心とする半径 $\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ の球面上にある。
ABC は球面を平面で切断した断面の円上にある。
$l^2+m^2+n^2=(l+m+n)^2-2(lm+mn+nl)=1-2(lm+mn+nl)$
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が直交するので
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2$
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=l^2+m^2+n^2$
$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=(l-m)^2+(m-n)^2+(n-l)^2=2(l^2+m^2+n^2)-4(ml+mn+nl)$
よって $2(l^2+m^2+n^2)=2(l^2+m^2+n^2)-4(ml+mn+nl)$ となり
$ml+mn+nl=0$
よって $l^2+m^2+n^2=1$
以上より $\sqrt{l^2+m^2+n^2}=1$ となり球の半径はつねに 1
よって半径 1 の球面を平面 $x+y+z=1$ で切断したときの断面は一定なので ABC は定円上にある。
2.
四面体 OABC の体積は三角形 ABC を底面とした三角錐なのでその面積は三角形 ABC の面積を S
O と平面 $x+y+z=1$ の距離を h としたとき $\frac{1}{3}Sh$ となる。
$AB=c,BC=a,CA=b$ とすると
$c=\sqrt{(l-m)^2+(m-n)^2+(n-l)^2}$
$a=\sqrt{(m-n)^2+(n-l)^2+(l-m)^2}$
$b=\sqrt{(n-l)^2+(l-m)^2+(m-n)^2}$
となり $a=b=c=\sqrt{(n-l)^2+(l-m)^2+(m-n)^2}=1$
ヘロンの公式より三角形の 3 辺の長さを a,b,c とすると $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ として
$S=\sqrt{s(s-a)(a-b)(s-c)}$
$a=b=c=1$ を代入すると $S=\sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
h は一定なので OABC の体積は $\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ となり一定。

3.

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{\overrightarrow{0\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{0\mathrm{C}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{\overrightarrow{0\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{0\mathrm{A}}}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\overrightarrow{0\mathrm{B}}}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{\overrightarrow{0\mathrm{C}}}{2}$$

である。

よって $|\overrightarrow{\mathrm{OL}}| = |\frac{\overrightarrow{0\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}| = \frac{\sqrt{(m+n)^2 + (n+l)^2 + (l+m)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(l^2+m^2+n^2) + 4(lm+mn+nl)}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 同様に

$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{ON}}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

よって LMN は中心 O から半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の球面を平面 $x+y+z=1$ で切断した断面の円上にある。

同様に $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}{2} = \frac{1}{2}$ となり

また $OP = (\frac{l}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2})$

$OQ = (\frac{m}{2}, \frac{n}{2}, \frac{l}{2})$

$OR = (\frac{n}{2}, \frac{l}{2}, \frac{m}{2})$

より PQR は $x+y+z=\frac{1}{2}$ 上にあるので

半径 $\frac{1}{2}$ 中心 O の球面を平面 $x+y+z=\frac{1}{2}$ で切断した断面の円上にある。

これらはともに同じ中心をもつ球を平行な平面で切断した断面なのでその円の中心は O と 1 直線上にある。

したがってこの直線は平面と垂直である。

したがってこの二つの円は平行な面上で中心と中心を結ぶ線分が平面に垂直になるので

この二つの円を断面とする一つの球が存在する。

また上述の通り ABC のとり方に依存しない。

またこの球は平面が一致しない限り一つに限るので ABC のとり方に依存せず一つきまる。

よって L,M,N,P,Q,R は定球面上にある。

証明終了