京都大学　1980 年　入学試験　理系数学　問題 4

問題

次のようなゲームがある．

① 最初の持ち点は 2 である．
② サイコロをふって，奇数の目が出れば持ち点が 1 点増し，偶数の目が出れば持ち点が 1 点減る．このような操作を 5 回する．ただし途中で持ち点が 0 になったら，その時点でゲームは終了する．

このゲームについて，5 回サイコロをふることができる確率，およびゲームが終わった時の持ち点の期待値を求めよ．

解答

サイコロをふって奇数がでる確率と偶数が出る確率はともに $\frac{1}{2}$
５回サイコロをふることができる確率は
４回目までに０になっていないことが必要。
１回について ±1 持ち点が変化しゲームを 4 回行うので、終了時点の持ち点は 0 か偶数
最大は 6 なので４回の結果は $6, 4, 2, 0$ の４通り
それぞれを考えると
結果が６になるのはすべて奇数のときの１通り
結果が４になるのは１回だけ偶数のときの４通り
結果が２になるのは２回だけ偶数のときの６通りあるがそれぞれの結果を並べると

$(1, 1, -1, -1) = 2$
$(1, -1, 1, -1) = 2$
$(1, -1, -1, 1) = 2$
$(-1, 1, 1, -1) = 2$
$(-1, 1, -1, 1) = 2$
$(-1, -1, 1, 1) = 0$

なので実際は５通り
結果が０になるのは上記以外で $2^4 - 10 = 6$ 通り
よって５回サイコロをふることができる確率は $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

１回について ±1 持ち点が変化しゲームを５回行うので、終了時点の持ち点は 0 か奇数。
したがって 5 回とも奇数である場合が最大で７、最小が 0
よって可能な結果は $0, 1, 3, 5, 7$ のいずれかそれぞれを考えると
結果が７になる場合
上記の通り５回とも奇数になる場合で１通り
結果が５になる場合
１回目から５回目の１回だけ偶数が出る場合で５通り
結果が３になる場合
１回目から５回目のうち２回だけ偶数がでる場合の１０通り考えられるが
１回目と２回目に偶数がでた場合はその時点で０となりゲームが終了するのでその場合を除いて９通り
結果が１になる場合

１回目から５回目のうち３回だけ偶数がでる場合で１０通り考えられるが
すべての組合せを考え、その時の結果を考えると

$$
\begin{aligned}
&(1,1,-1,-1,-1)=1\\
&(1,-1,1,-1,-1)=1\\
&(-1,1,1,-1,-1)=1\\
&(1,-1,-1,1,-1)=1\\
&(-1,1,-1,1,-1)=1\\
&(1,-1,-1,-1,1)=0\\
&(-1,1,-1,-1,1)=0\\
&(-1,-1,1,1,-1)=0\\
&(-1,-1,1,-1,1)=0\\
&(-1,-1,-1,1,1)=0
\end{aligned}
$$

の結果５通り
結果が０になる場合は上記の場合以外

したがって期待値は $\dfrac{7\cdot 1+5\cdot 5+3\cdot 9+1\cdot 5}{32}=\dfrac{64}{32}=2$

期待値は 2

証明終了