京都大学　1980 年　入学試験　理系数学　問題 5

問題

互いに異なる n 個（$n \geqq 3$）の実数の集合 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ が次の性質をもつという.

「S から相異なる要素 a_i，a_j をとれば $a_i - a_j$，$a_j - a_i$ の少なくとも一方は必ず S に属する」

このとき,

1. 次の 2 つのうちのいずれか一方が成り立つことを示せ.
   （イ）$a_i \geqq 0$（$i=1$，2，$\cdots$，n）
   （ロ）$a_i \leqq 0$（$i=1$，2，$\cdots$，n）
2. a_1，a_2，$\cdots$，a_n の順序を適当に変えれば等差数列になることを示せ.

解答

まず、a_1，a_2，$\cdots$，a_n を大小の順にならべ変えて、値の小さい方から b_1，b_2，$\cdots$，b_n とする。
順番を適当にかえれば等差数列になることをしめすためにはこの数列について考えてもよい。
このとき当然これらの数の最小は b_1 であり、最大は b_n である。
1.
$b_1 < 0$ かつ $b_n > 0$ とすると
$b_1 < 0$ より $b_n - b_1 > b_n$
$b_n > 0$ より $b_1 - b_n < b_1$
$b_n - b_1$ または $b_1 - b_n$ のいずれかが集合に属さなければならないので
b_1 より小さい元または b_n より大きい元が集合に属することになり、b_1 が最小、b_n が最大に反する。
したがって $b_1 \geqq 0$ かつ $b_n \geqq 0$ または $b_1 \leqq 0$ かつ $b_n \leqq 0$ のいずれかである。
$b_1, b_2, \cdots, b_n$ は大きさの順にならべて、かつそれぞれの要素は異なるので
$b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_n$ であるから。
$b_1 \geqq 0$ ならば $b_i \geqq 0$
$b_n \leqq 0$ ならば $b_i \leqq 0$

2.
$b_1 \geqq 0$ かつ $b_n \geqq 0$ の場合をかんがえる。
$b_1, b_2, \cdots, b_n$ は大きさの順にならべて、かつそれぞれの要素は異なるので
$b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_n$ となる。
したがって $b_2 > b_1 \geqq 0$ より $b_2 > 0$
任意の $i (1 \leqq i \leqq n-1)$ について $b_i < b_{i+1}$ なので $b_i - b_{i+1} < 0$
しかし b_i はすべて正または 0 なので $b_i - b_{i+1}$ は S の要素とはなり得ない
しかし $b_i - b_{i+1}$ または $b_{i+1} - b_i$ のいずれかが S の要素なので $b_{i+1} - b_i$ が S の要素である。
S の要素はすべて b_1 と等しいか大きいので $b_{i+1} - b_i \geqq b_1$
また b_{i+1} と b_i は異なるので $b_{i+1} - b_i > 0$
$b_1 = 0$ の場合
$b_{i+1} - b_i > b_1$ となり b_1 より大きな次の要素は b_2 なので
$b_{i+1} - b_i < b_2$ とすると b_1 と b_2 の間に別の要素があることになり大きさの順に並べ変えたことに反する。
よって $b_{i+1} - b_i \geqq b_2$

したがって $b_{i+1}-b_2 \geqq b_i$

$b_{i+1}-b_2$ も S の要素でなければならないが $b_{i+1}-b_2 < b_{i+1}$ より

$b_{i+1}-b_2$ は $b_{i+1} > b_{i+1}-b_2 \geqq b_i$ となり

b_{i+1} と b_i の間には要素は無いので $b_{i+1}-b_2 = b_i$

これが任意の i について成り立つので b_i は公差 b_2 の等差数列

$b_1 > 0$ の場合は同様に b_i は公差 b_1 の等差数列。

$b_1 \leqq 0$ かつ $b_n \leqq 0$ の場合も同様に

b_i は公差 b_1 または b_2 の等差数列

以上よりすべての場合において b_i は等差数列である。

よってこれ以上並べ変えるまでもなく、a_i を大きさの順に並べ変えた数列は等差数列となる。

つまり a_i を適当に並べ変えれば等差数列となる。

証明終了