京都大学　1980 年　入学試験　理系数学　問題 6

問題

0，1 のいずれとも異なる 2 整数 a，b（$a \neq b$）を考え，$f(x) = x(x-1)(x-a)(x-b)+1$ とおく．$g(x)$，$h(x)$ が整数係数の多項式で $f(x) = g(x)h(x)$ であると仮定する．このとき，

1. $g(0) = h(0)$
2. $g(x)$，$h(x)$ のどちらも定数でないならば $g(x) = h(x)$ であることを示せ.
3. (2) の場合が起こるような a，b の例を 1 組求めよ.

解答

1.
$f(x) = g(x)h(x)$ なので
$f(0) = g(0)h(0)$
$f(0) = 1$ であり $g(0), h(0)$ は整数係数の多項式なので 0 次の係数も整数。
したがって $g(0) = m, h(0) = n$ とすると $m, n = 1$
整数の積が 1 になるのは $(m, n) = (1, 1), (-1, -1)$ に限るのでどちらにしても $m = n$
よって $g(0) = h(0)$

2.
$f(1) = f(a) = f(b) = 1$ より
1. と同様に
$g(1) = h(1), g(a) = h(a), g(b) = h(b)$
また $f(x)$ は 4 次なので $g(x), h(x)$ のどちらも定数でないならば $g(x), h(x)$ は 1 次以上 3 次以下
3 次以下の多項式は異なる 4 つの x に対する値きまれば一つに決まる。
a, b は $0, 1$ と異なり $a \neq b$ なので $0, 1, a, b$ はすべて相異なる。
したがって、$g(x), h(x)$ はともにおなじ 4 つの値を共有するので同一でなければならない。
3.
$g(x) = h(x)$
また $f(x)$ の 4 次の係数が 1 なので $g(x), h(x)$ の最高次の係数は $(1, 1)$ または $(-1, -1)$
$g(x), h(x)$ の次数は 2 となる。
また $g(0) = \pm 1$ より定数項は ± 1
$c = \pm 1, e = \pm 1(\pm$ は任意) として
したがって $g(x) = h(x) = cx^2 + dx + e$ と表せる。
ここで
$g(1) = c + d + e = \pm 1$
より
$d = \pm 1 \pm 1 \pm 1 = \pm 3, \pm 1$ となり
$g(x)$ は

$$\begin{aligned}
&x^2+x+1\\
&x^2+x-1\\
&x^2-x+1\\
&x^2-x-1\\
&x^2+3x+1\\
&x^2+3x-1\\
&x^2-3x+1\\
&x^2-3x-1\\
&-x^2+x+1\\
&-x^2+x-1\\
&-x^2-x+1\\
&-x^2-x-1\\
&-x^2+3x+1\\
&-x^2+3x-1\\
&-x^2-3x+1\\
&-x^2-3x-1
\end{aligned}$$

の可能性があるが $g(1)=\pm 1$ を満たす組合せは

$$\begin{aligned}
&x^2+x-1\\
&x^2-x+1\\
&x^2-x-1\\
&x^2-3x+1\\
&-x^2+x+1\\
&-x^2+x-1\\
&-x^2-x+1\\
&-x^2+3x-1
\end{aligned}$$

となる。
１例として
$g(x)=x^2+x-1$ から $f(x)$ を計算すると
$f(x)=g^2(x)=(x^2+x-1)^2=x^4+2x^3-x^2-2x+1$
$f(x)-1$ を因数分解すると
$f(x)-1=x(x-1)(x+1)(x+2)$ となり $a=-1,b=-2$ で成立する。よって、１組は

$$a=-1,b=-2$$

残りの組を計算すると
x^2-x+1 のときは整数にならない
x^2-x-1 のときは $a=-1,b=2$
x^2-3x+1 のときは $a=2,b=3$
$-x^2+x+1$ のときは $a=-1,b=2$
$-x^2+x-1$ のときは整数にならない
$-x^2-x+1$ ときは $a=-1,b=-2$
$-x^2+3x-1$ のときは $a=2,b=3$

となる。
よって可能な (a, b) の組合せは

$$(a, b) = (-1, -2), (-1, 2), (2, 3), (-2, -1), (2, -1), (3, 2) \text{ の } 6 \text{ 通り}$$

証明終了