京都大学　1981 年　入学試験　文系数学　問題 3

問題

　a を正の定数とする．放物線 $C_a : y = x^2 - a^2$ 上の点 P から放物線 $C : y = x^2$ に引いた 2 本の接線の接点を Q，R とするとき，線分 QR と C とで囲まれた部分の面積は，P の取り方に無関係であることを示せ．

解答

C_a 上の点 $P = (p, p^2 - a^2)$ とする。
C の接線の方程式は
$f(x) = x^2$ とすると $f'(x) = 2x$ なので
$x = b$ の時の接線は $y = 2bx - b^2$
この接線が P を通る時の b の値は
$p^2 - a^2 = 2bp - b^2$ を満たすので
$b = p - a, p + a$ となる。
Q の x 座標が R より小さいと仮定しても一般性を失わないので
Q,R は Q$= (p - a, (p - a)^2)$,R$= (p + a, (p + a)^2)$ となる。
したがて QR の式は $y = 2px + (a^2 - p^2)$
この線分と C の囲む部分の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{p-a}^{p+a} -x^2 + 2px + (a^2 - p^2)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + px^2 + (a^2 - p^2)x \right]_{p-a}^{p+a} \\
&= -\frac{1}{3}(p+a)^3 + p(p+a)^2 + (a^2 - p^2)(p+a) - (-\frac{1}{3}(p-a)^3 + p(p-a)^2 + (a^2 - p^2)(p-a)) \\
&= -\frac{1}{3}((p+a)^3 - (p-a)^3) + p(p+a)^2 - p(p-a)^2 + (a^2 - p^2)((p+a) - (p-a)) \\
&= -\frac{1}{3}(6ap^2 + 2a^3) + p((p+a)^2 - (p-a)^2) + 2a(a^2 - p^2) \\
&= -2ap^2 - \frac{2a^3}{3} + p(4ap) + 2a^3 - 2ap^2 \\
&= -2ap^2 - \frac{2a^3}{3} + 4ap^2 + 2a^3 - 2ap^2 \\
&= \frac{a^3}{3}
\end{aligned}
$$

となり a にのみ依存し P のとり方には関係ない。
証明終了