京都大学　1981 年　入学試験　文系数学　問題 4

問題

6 人が円陣を作ってすわり，次のゲームをする；

1. 最初，交互に赤と白の帽子をかぶり，隣り合う 2 人ずつの 3 つの組を作る．各組でジャンケンをし，負けた人は勝った人と同色の帽子をかぶる．
2. 6 人が同色の帽子にならない場合，隣り合う異なる色の帽子をかぶった 2 人ずつが組を作り，各組でジャンケンをし，負けた人は勝った人と同色の帽子をかぶる．（両隣が自分と同色の帽子の人はジャンケンをしない．）
3. ゲームは，6 人の帽子が同色になれば終了とし，それまで何回か (ii) を繰り返す．

このとき，n 回までにゲームが終了する確率を求めよ．ただし，ジャンケンでは一方が勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で勝負がつくものとする．

解答

赤の帽子の数 r、白の帽子の数 w とする。
また、赤の帽子を R, 白の帽子を W と書く当然、$r + w = 6$
二つの要素の大きくない方を取り出す関数。$\min(a, b)$ を定義する。
$\min(r, w) = 3$ のとき (つまり、r, w が等しいとき)
帽子のかぶりかたは (RWRWRW),(RRWRWW),(RRWWRW),(RRRWWW) のいずれかを回転したものとなる。
また、(RRWWRW) は (WWRWRR) の WR を入れ換えたものに等しいので、RW は対等なのでおなじものとみなしてよい
よって異なる組合せは (RWRWRW),(RRWRWW),(RRRWWW) の 3 通り
ジャンケンが行われる組はそれぞれ
(RWRWRW) 3 組
(RRWRWW) 3 組
(RRRWWW) 2 組
となる。
１組のジャンケンで r の増減は 1 なので 3 組ジャンケンすると $\pm 1, \pm 3$ となる。
したがって $\min(r, w) = 2, 0$ のいずれかとなる。
２組ジャンケンが行われる場合は ± 2 となり $\min(r, w) = 1$ となる。

次に $\min(r, w) = 2$ の時を考える。
このときかぶりかたは (RRWWWW),(RWRWWW),(RWWRWW) の 3 通りとなり
それぞれについて 2 組のジャンケンが行われる。
２組のジャンケンが行われる場合 r の増減は $0, \pm 2$ となり $\min(r, w) = 0, 2$ のいずれかとなる。
始めのならびは RWRWRW なので $\min(r, w) = 3$ からスタートし
$\min(r, w)$ は 2 または 0 にしかならない。
$\min(r, w) = 2$ の時もやはりジャンケンの後の $\min(r, w)$ は 0,2 にしかならないので
２回目以降は $\min(r, w)$ が 2 のとき $\min(r, w)$ が 0 にならなければゲームは継続する。
１回目のジャンケンの結果 $\min(r, w) = 2$ になる確率は
３組のジャンケンですべてがおなじ色の方が勝たない場合なのですべておなじ色が勝つ可能性はすべて R ま

たはすべて W の二種類なので

$1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$

2 回目以降は 2 組のジャンケンで勝つ色が異なる場合なので $\frac{1}{2}$

よって n 回まで継続する確率は

$n=1$ のとき 1

$n=2$ のとき $\frac{3}{4}$

$n>3$ のとき $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

したがって n 回までにゲームが終了する確率は $n+1$ 回まで継続する確率の逆なので

$$1-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

証明終了