

問題

- 四面体 PQRS が, $\angle PQR = \angle RQS = \angle SQP = 90^\circ$ および $PR = PS = a$ (定数) をみたすとき, このような四面体の体積の最大値を求めよ.
- 四面体 ABCD が, $AB = BC = CD = DA = a$ (定数) をみたすとき, このような四面体の体積の最大値を求めよ.

解答

1.

Q を原点とし、QP を z 軸の正の方向、QR を x 軸の正の方向、QS を y 軸の正の方向となるように直交座標系をとることができる。

このとき各点の座標は以下になる。

$$R = (x, 0, 0)$$

$$S = (0, y, 0)$$

$$P = (0, 0, z)$$

$$\text{そのとき、} PR = PS = a \text{ なので } x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$$

$$x > 0, y > 0 \text{ なので } x = y$$

$$\text{この四面体の体積 } V \text{ は } V = \frac{xyz}{6} \text{ なので}$$

$$xy = x^2$$

$$x^2 = a^2 - z^2 \text{ より}$$

$$V = \frac{(a^2 - z^2)z}{6}$$

となる。

$$f(z) = (a^2 - z^2)z = a^2z - z^3 \text{ とすると}$$

$$f'(z) = a^2 - 3z^2 = (a - \sqrt{3}z)(a + \sqrt{3}z)$$

$f(z)$ の 3 次の係数が負なので $f'(z) = 0$ となる値の大きい方で極大となる。

よって $z > 0$ の範囲では $z = \frac{a}{\sqrt{3}}$ で最大となりそのときの体積は

$$V = \frac{\left(a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2\right) \frac{a}{\sqrt{3}}}{6} = \frac{a^3}{9\sqrt{3}}$$

よって最大値は

$$\frac{a^3}{9\sqrt{3}}$$

2.

$$CA = l$$

$$DB = m$$

CA の中点を P

DB の中点を Q

体積は 4 面体 PABD の体積の 2 倍

したがって PABD が最大となる場合を考えればよい。

$\triangle ABD, \triangle ACD$ は二等辺三角形なので $\angle APB = \angle APC = 90^\circ$

l を一定とすると体積は三角形 PBD の面積が最大となる時に最大となる。

したがって

角 PBD が 90° となる時最大となる。

このときは、 $AB = AC$ で $\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 90^\circ$ となるので

1. より

体積は $AP = \frac{a}{\sqrt{3}}$ で最大値 $\frac{a^3}{9\sqrt{3}}$ をとる。

よって 4 面体の体積の最大値は

$$\frac{2a^3}{9\sqrt{3}}$$

証明終了