京都大学　1981年　入学試験　理系数学　問題1

問題

座標平面上で，点 $(4,5)$ を通る直線が放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ と2点P，Qで交わっているとき，線分PQの長さが最小となるような直線の傾きと，そのときの線分PQの長さを求めよ．

解答

$(4,5)$ を通る直線の方程式を $y=ax+c$ としたとき $a=0$ の場合放物線と1点でしか交わらないので $a\neq 0$
よって $y=ax-(4a-5)$ $(a\neq 0)$ と表せる。
この直線と $y=\dfrac{1}{4}x^2$ の交点は $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-ax+(4a-5)=0$ となる x 座標をもつ。
その x を α,β とするとそのときの y 座標は $a\alpha-(4a-5)$,$a\beta-(4a-5)$ なので
2点間の距離を l とすると $l^2=(\alpha-\beta)^2+(a\alpha-(4a-5)-a\beta-(4a-5))^2$
$l>0$ なので l が最小となるとき l^2 も最小とならねばならないので
$(\alpha-\beta)^2+(a\alpha-(4a-5)-(a\beta-(4a-5)))^2$ が最小となる a の値が求める傾きとなる。

$$
\begin{aligned}
&(\alpha-\beta)^2+(a\alpha-(4a-5)-(a\beta-(4a-5)))^2\\
&=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+(a\alpha-a\beta)^2\\
&=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+a^2\alpha-a^2\alpha\beta+a^2\beta^2\\
&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+a^2((\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta)\\
&=(1+a^2)((\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta)
\end{aligned}
$$

$\alpha+\beta=4a$ $\alpha\beta=4(4a-5)$ より

$$
\begin{aligned}
l^2&=(1+a^2)((\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta)\\
&=(1+a^2)((4a)^2-16(4a-5))\\
&=(1+a^2)((4a)^2-16(4a-5))\\
&=16(1+a^2)(a^2-4a+5)\\
&=16(a^4-4a^3+6a^2-4a+5)
\end{aligned}
$$

$f(a)=a^4-4a^3+6a^2-4a-5$ とおくと
$f'(a)=4a^3-12a^2+12a-4=4(a^3-3a^2+3a-1)=4(a-1)^3$
よって $f(x)$ は $a=1$ において最小となる4次式
よって傾き $a=1$ のとき最小となって
$l^2=16(2)(2)=64$
$l>0$ より $l=8$
以上より

$$傾き=1$$

$$長さ=8$$

証明終了