京都大学　1981 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

空間の，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C を考える．線分 OA，AB，BC，CO の上にそれぞれ点 P_1，P_2，P_3，P_4 があって $P_1P_2P_3P_4$ が平行四辺形をなすものとする．このとき次の問いに答えよ．

1. $|\vec{OP_1}| : |\vec{P_1A}| = k : (1-k)$，$|\vec{AP_2}| : |\vec{P_2B}| = (1-l) : l$，$|\vec{BP_3}| : |\vec{P_3C}| = m : (1-m)$，$|\vec{CP_4}| : |\vec{P_4O}| = (1-n) : n$ とすれば，$k = l = m = n$ であることを示せ．
   ただし，$|\quad|$ はベクトルの大きさを表わす．
2. 平行四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ の対角線の交点は，線分 OB，AC のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ．

解答

$|\vec{OP_1}| : |\vec{P_1A}| = k : (1-k)$ より
$\overrightarrow{OP_1} = k\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OP_2} = l\overrightarrow{OA} + (1-l)\overrightarrow{OB}$
$\overrightarrow{OP_3} = (1-m)\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}$
$\overrightarrow{OP_4} = n\overrightarrow{OC}$
となる。

$P_1P_2P_3P_4$ が平行四辺形をなすので

$P_1P_2 /\!\!/ P_3P_4$

$P_2P_3 /\!\!/ P_4P_1$

$|P_1P_2| = |P_3P_4|$

$|P_2P_3| = |P_4P_1|$

である。

よって
$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$
$\overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_1P_4}$
となる。
$\overrightarrow{P_1P_2} = l\overrightarrow{OA} + (1-l)\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{P_4P_3} = (1-m)\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} - n\overrightarrow{OC}$
より
$l\overrightarrow{OA} + (1-l)\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = (1-m)\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} - n\overrightarrow{OC}$
また
$\overrightarrow{P_2P_3} = (1-m)\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} - l\overrightarrow{OA} - (1-l)\overrightarrow{OB}$
$\overrightarrow{P_1P_4} = n\overrightarrow{OC} - k\overrightarrow{OA}$
より
$(1-m)\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} - l\overrightarrow{OA} - (1-l)\overrightarrow{OB} = n\overrightarrow{OC} - k\overrightarrow{OA}$

よって

$$
\begin{aligned}
l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-l)\overrightarrow{\mathrm{OB}}-k\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(1-m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}-m\overrightarrow{\mathrm{OC}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=0\\
(l-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(m-l)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n-m\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=0\\
(1-m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+m\overrightarrow{\mathrm{OC}}-l\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(1-l)\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=n\overrightarrow{\mathrm{OC}}-k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\
(k-l)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(l-m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(m-n)\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=0
\end{aligned}
$$

OABC は同一面上にはないので $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ では $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を表すことはできない
$\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のうちの二つでは残りのベクトルを表すことはできない。
したがって $(l-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(m-l)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n-m\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ $(k-l)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(l-m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(m-n)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ より $l=k,m=l,n=m$ である。以上より $k=l=m=n$ となる。
2.
$\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ の対角線上の点は
$a\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1+(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OP}}_3$,$b\overrightarrow{\mathrm{OP}}_2+(1-b)\overrightarrow{\mathrm{OP}}_4$ と表せる。
したがってこの交点のベクトルは
$a\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1+(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OP}}_3=b\overrightarrow{\mathrm{OP}}_2+(1-b)\overrightarrow{\mathrm{OP}}_4$
となる a,b の値をもつ。
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_2=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_3=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_4=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$
より

$$
\begin{aligned}
a\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1+(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OP}}_3&=b\overrightarrow{\mathrm{OP}}_2+(1-b)\overrightarrow{\mathrm{OP}}_4\\
ak\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-a)((1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OC}})-b(k\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}})-(1-b)k\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=0\\
ak\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-a)(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-a)k\overrightarrow{\mathrm{OC}}-bk\overrightarrow{\mathrm{OA}}-b(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(1-b)k\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=0\\
(a-b)k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-a-b)(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(b-a)k\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=0
\end{aligned}
$$

よって
$a-b=0$ $1-a-b=0$ よって $a=b=\dfrac{1}{2}$
よって交点のベクトルは
$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}_3=\dfrac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}((1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OC}})$
OB, AC の中点を結ぶ線分上の点は $(1-c)\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ と表せる。
$c=k$ とするとこのベクトルは一致するので
平行四辺形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ の対角線の交点は，線分 OB，AC のそれぞれの中点を結ぶ線分上にある。

証明終了