京都大学　1981 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

　k は定数，m は一つの自然数とする．
　$x>0$ のとき，つねに $x^m-1 \leqq k(x^{m+1}-1)$ であるならば，$k=\dfrac{m}{m+1}$ であることを示せ．

解答

$x^m-1 \leqq k(x^{m+1}-1)$ ならば
$x=1$ のとき
$x^m-1=0 \leqq 0=k(x^{m+1}-1)$ となり任意の k で成立するので $x \neq 0$ の時のみ考えればよい
$k \leqq 0$ ならば $x>1$ のとき $x^m-1>0$ かつ $k(x^{m+1}-1)<0$ となり条件が成立しないので
k がすべての x で条件を満たすとすると少なくとも $k>0$ でなければならない。
よって $k>0$ とする。
$x<1$ のとき
$(x^{m+1}-1)<0$ なので

$$
\begin{aligned}
x^m-1 &\leqq k(x^{m+1}-1)\\
\frac{x^m-1}{x^{m+1}-1} &\geqq k\\
\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{(x-1)(x^m+x^{m-1}+\cdots+1)} &\geqq k\\
\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^m+x^{m-1}+\cdots+1} &\geqq k
\end{aligned}
$$

$k>0$ なので

$$
\begin{aligned}
\frac{x^m+x^{m-1}+\cdots+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1} &\leqq \frac{1}{k}\\
x+\frac{1}{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1} &\leqq \frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

$x<1$ より $x^k<1$ なので $x^{m-1}+x^{m-1}+\cdots+1<m$
$x+\dfrac{1}{x^{m-1}+x^{m-1}+\cdots+1}>x+\dfrac{1}{m}$
よって

$$
\begin{aligned}
x+\frac{1}{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1} &\leqq \frac{1}{k}\\
x+\frac{1}{m} &< \frac{1}{k}\\
k &< \frac{m}{mx+1}
\end{aligned}
$$

$x<1$ より $\dfrac{m}{mx+1}>\dfrac{m}{m+1}$
よって
$k \leqq \dfrac{m}{m+1}$ ならば条件を満たす。

$x>1$ のとき

$(x^{m+1}-1)>0$ なので

$$\begin{aligned}
x^m-1 &\leqq k(x^{m+1}-1)\\
\frac{x^m-1}{x^{m+1}-1} &\leqq k\\
\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{(x-1)(x^m+x^{m-1}+\cdots+1)} &\leqq k\\
\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^m+x^{m-1}+\cdots+1} &\geqq k
\end{aligned}$$

$k>0$ なので

$$\begin{aligned}
\frac{x^m+x^{m-1}+\cdots+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1} &\leqq \frac{1}{k}\\
x+\frac{1}{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1} &\leqq \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

$x>1$ より $x^k>1$ なので $x^{m-1}+x^{m-1}+\cdots+1>m$

よって

$x+\dfrac{1}{x^{m-1}+x^{m-1}+\cdots+1}<x+\dfrac{1}{m}$

したがって

$$\begin{aligned}
x+\frac{1}{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1} &\geqq \frac{1}{k}\\
x+\frac{1}{m} &> \frac{1}{k}\\
k &> \frac{m}{mx+1}
\end{aligned}$$

$x>1$ より $\dfrac{m}{mx+1}<\dfrac{m}{m+1}$

よって

$k\geqq\dfrac{m}{m+1}$ ならば条件を満たす。

以上の通り、$\dfrac{m}{m+1}\leqq k\leqq\dfrac{m}{m+1}$ ならば条件を満たすので

$k=\dfrac{m}{m+1}$ ならば任意の x について式を満たす。

また $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^{m+1}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^m+x^{m-1}+\cdots+1}=\frac{m}{m+1}$

より $k\neq\dfrac{m}{m+1}$ ならば条件の成立しない x が存在する。

$$\text{よって条件を満たすならば } k=\frac{m}{m+1}\text{でなければならない。}$$

証明終了