京都大学　1981 年　入学試験　理系数学　問題 4

問題

1. 四面体 PQRS が，$\angle \mathrm{PQR} = \angle \mathrm{RQS} = \angle \mathrm{SQP} = 90^\circ$ および $\mathrm{PR} = \mathrm{PS} = a$（定数）をみたすとき，このような四面体の体積の最大値を求めよ．
2. 四面体 ABCD が，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{DA} = a$（定数）をみたすとき，このような四面体の体積の最大値を求めよ．

解答

1.

Q を原点とし、QP を z 軸の正の方向、QR を x 軸の正の方向、QS を y 軸の正の方向となるように直交座標系をとることができる。

このとき各点の座標は以下のようになる。

R$= (x, 0, 0)$

S$= (0, y, 0)$

P$= (0, 0, z)$

そのとき、$\mathrm{PR} = \mathrm{PS} = a$ なので $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$

$x > 0, y > 0$ なので $x = y$

この四面体の体積 V は $V = \dfrac{xyz}{6}$ なので

$xy = x^2$

$x^2 = a^2 - z^2$ より

$V = \dfrac{(a^2 - z^2)z}{6}$

となる。

$f(z) = (a^2 - z^2)z = a^2 z - z^3$ とすると

$f'(z) = a^2 - 3z^2 = (a - \sqrt{3}z)(a + \sqrt{3}z)$

$f(z)$ の 3 次の係数が負なので $f'(z) = 0$ となる値の大きい方で極大となる。

よって $z > 0$ の範囲では $z = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ で最大となりそのときの体積は

$V = \dfrac{\left(a^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2\right)\dfrac{a}{\sqrt{3}}}{6} = \dfrac{a^3}{9\sqrt{3}}$

よって最大値は

$$\frac{a^3}{9\sqrt{3}}$$

2.

$\mathrm{CA} = l$

$\mathrm{DB} = m$

CA の中点を P

DB の中点を Q

体積は 4 面体 PABD の体積の 2 倍

したがって PABD が最大となる場合を考えればよい。

$\triangle \mathrm{ABD}, \triangle \mathrm{ACD}$ は二等辺三角形なので $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{APC} = 90^\circ$

l を一定とすると体積は三角形 PBD の面積が最大となるときに最大となる。

したがって

角 PBD が $90°$ となるとき最大となる。

このときは、$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ で $\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BPC}=90°$ となるので

1. より

体積は $\mathrm{AP}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ で最大値 $\dfrac{a^3}{9\sqrt{3}}$ をとる。

よって 4 面体の体積の最大値は

$$\frac{2a^3}{9\sqrt{3}}$$

証明終了