京都大学　1981 年　入学試験　理系数学　問題 5

問題

　A 君がおみくじを引く．N 回引いても「大吉」が出なければ打ち切ってやめる．もし N 回までに大吉が出ればその回でやめることにした．ただし，N は 2 以上の定まった自然数とする．

　A 君が 1 回ごとに大吉を引く確率を p とする．このとき A 君がおみくじを引くのをやめるまでの回数の期待値（平均ともいう）E は $E = \dfrac{1-(1-p)^N}{p}$ と表わされることを示し，$p = \dfrac{1}{5}$，$N = 10$ のときの E の値を小数第 2 位まで求めよ．

解答

k 回目に大吉が出る確率を P_k とすると

１回目に引いて大吉がでる確率 P_1 は p

k 回目に大吉が出る確率は $k-1$ 回目までに大吉が出なくて k 回目に大吉が出る確率なので

$k-1$ 回まですべて大吉以外が出る確率 $(1-p)^{k-1}$ に k 回目に大吉が出る確率をかけたものなので

$P_k = p(1-p)^{k-1}$

k 回目で止める確率は $k < N$ の時は P_k

N 回目は何が出ても止めるので

$k = N$ の時は $(1-p)^{N-1} = (1-p)^N + p(1-p)^{N-1}$ となる。

止めるまでの回数の期待値は $\dfrac{1}{N}\left(N(1-p)^{N-1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} kP_k\right)$ となる。

$$
\begin{aligned}
E &= N(1-p)^{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1} kP_k \\
&= N(1-p)^{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1} kp(1-p)^{k-1} \\
&= N(1-p)^{N-1} + p\sum_{k=1}^{N-1} k(1-p)^{k-1} \\
&= N(1-p)^{N-1} + p(1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \cdots + (N-1)(1-p)^{N-2} \\
&= N(1-p)^N + p(1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \cdots + N(1-p)^{N-1}
\end{aligned}
$$

$T = 1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \cdots + N(1-p)^{N-1}$ とすると

$(1-p)T = (1-p)^1 + 2(1-p)^2 + \cdots + (N-2)(1-p)^{N-2} + N(1-p)^N$

より

$T - (1-p)T = pT = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^{N-2} + (1-p)^{N-1} - N(1-p)^N$

となる

$S = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^{N-1}$ とすると

$S-(1-p)S = 1+(1-p)+(1-p)^2+\cdots+(1-p)^{N-2}-((1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\cdots+(1-p)^N) = 1-(1-p)^N$

よって $S = \dfrac{1-(1-p)^N}{p}$

$pT = S - N(1-p)^N$ より

$pT = \dfrac{1-(1-p)^N}{p} - N(1-p)^N$

よって $E = N(1-p)^N + pT$ より

$$
\begin{aligned}
E &= N(1-p)^N + \frac{1-(1-p)^N}{p} - N(1-p)^N \\
&= \frac{1-(1-p)^N}{p}
\end{aligned}
$$

となり

$$E = \frac{1-(1-p)^N}{p}$$

$p = \dfrac{1}{5}, N = 10$ のとき

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1-(1-\frac{1}{5})^{10}}{\frac{1}{5}} \\
&= 5(1-\frac{4^{10}}{5^{10}}) \\
&= 5-\frac{4^{10}}{5^9} \\
&= 5-\frac{4^{10}}{5^9} \\
&= \frac{5^{10}-4^{10}}{5^9} \\
&= \frac{(5^5-4^5)(5^5+4^5)}{5^9} \\
&= \frac{(5-4)(5^4+4\cdot 5^3+4^2\cdot 5^2+4^3\cdot 5+4^4)(5^5+4^5)}{5^9} \\
&= \frac{(5^4+4\cdot 5^3+4^2\cdot 5^2+4^3\cdot 5+4^4)(5^5+4^5)}{5^9} \\
&= \frac{(625+4\cdot 125+16\cdot 25+64\cdot 5+256)(5^5+4^5)}{5^9} \\
&= \frac{2101(3125+1024)}{5^9} \\
&= \frac{2101\cdot 4149}{5^9} \\
&= \frac{2101\cdot 4149\cdot 512}{2^9\cdot 5^9} \\
&= \frac{2101\cdot 4149\cdot 512}{2^9\cdot 5^9} \\
&= \frac{2101\cdot 4149\cdot 512}{10^9} \\
&= \frac{4463129088}{10^9} \\
&= 4.463129088
\end{aligned}
$$

よって

$$E = 4.46$$

証明終了