京都大学　1981 年　入学試験　理系数学　問題 6

問題

次の不等式を証明せよ．ただし，e は自然対数の底である．

1. $0 < a \leqq x$ のとき $\displaystyle\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqq \frac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$
2. $3 < b$ のとき $\displaystyle\int_3^b e^{-\frac{t^2}{2}+2t}\,dt < e^{\frac{3}{2}}$

解答

1.
$\displaystyle F(x) = \int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$
とする。
$f(x) = -\dfrac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$ とすると $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}$
よって $g(x) = f'(x)$ として $\displaystyle\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a) = -\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}}$
$\dfrac{x^2+1}{x^2} > 1$ より
$g(x) > e^{-\frac{x^2}{2}}$
がすべての $x > 0$ について成り立つ。
したがって

$\displaystyle\int_a^x g(t)\,dt \geqq F(x)$
よって
$-\dfrac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} + \dfrac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}} \geqq \displaystyle\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ より

$$\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqq \frac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2.
$f(x) = \dfrac{1}{2-x}e^{-\frac{x^2}{2}+2x}$
とすると
$f'(x) = \dfrac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}e^{-\frac{x^2}{2}+2x}$ となる。
したがって

$$\begin{aligned}
\int_3^b e^{-\frac{t^2}{2}+2t}\,dt &\leqq \int_3^b f'(t)\,dt \\
&= \Big[f(t)\Big]_3^b \\
&= f(b) - f(3) \\
&= \frac{1}{2-b}e^{-\frac{b^2}{2}+2b} - \frac{1}{2-3}e^{-\frac{3^2}{2}+6} \\
&= e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{b-2}e^{-\frac{b^2}{2}+2b}
\end{aligned}$$

$b > 3$ より $b - 2 > 0$ よって $\dfrac{1}{b-2}e^{-\frac{b^2}{2}+2b} > 0$
したがって

$$\int_3^b e^{-\frac{t^2}{2}+2t}\,dt \leqq e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{b-2}e^{-\frac{b^2}{2}+2b} < e^{\frac{3}{2}}$$

以上より

$$\int_3^b e^{-\frac{t^2}{2}+2t}\,dt < e^{\frac{3}{2}}$$

証明終了