京都大学　1982 年　入学試験　文系数学　問題 1

問題

$0 \leqq x$, $0 \leqq y$, $0 \leqq z$ で定まる空間の部分を A とし，$0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq 1$ で定まる立方体を C とする．t が $0 < t < 3$ の範囲で動くとき，平面 $x + y + z = t$ による，A および C の切り口の面積を，それぞれ $T(t)$ および $S(t)$ とする．

1. $T(t)$ を求めよ．
2. $S(t)$ の最大値を求めよ．

解答

t における x 軸と $x + y + z = t$ の交点は
$y = z = 0$ の時なので $x = t$
同様に y 軸との交点は $y = t$、z 軸との交点は $z = t$ したがってこの切口は $(t, 0, 0), (0, t, 0), (0, 0, t)$ の 3 点を頂点とする正三角形
よってこの三角錘の体積は $(0, 0, 0), (t, 0, 0), (0, t, 0)$ の 3 点を頂点とする直角三角形を底面とし高さを t とする三角錘の体積なので $\dfrac{t^3}{6}$
直線 $x = y = z$ と $x + y + z = t$ の交点と原点 O の距離なので交点は $(\dfrac{t}{3}, \dfrac{t}{3}, \dfrac{t}{3})$ なので
その距離は $\sqrt{3\dfrac{t^2}{3^2}} = \dfrac{t}{\sqrt{3}}$
よってこの三角形の面積を S とすると三角錘の体積は $\dfrac{1}{3}S\sqrt{t}$ なので
$\dfrac{t^3}{6} = \dfrac{St}{3\sqrt{3}}$
よって $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2$
したがって

$$T(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$

2./ 立方体は $0 \leqq x, 0 \leqq y, 0 \leqq z$ の範囲と $x \leqq 1, y \leqq 1, z \leqq 1$ の範囲の共通部分なので
$x + y + z = 1$ による切口の形は
$0 < t < 1$ の範囲では C との切口とおなじ
よって $S(t) = T(t)$
$1 < t < 2$ の範囲では A から $x > 1, y > 1, z > 1$ の部分の三角形を除いたもの
x 軸上の頂点の位置は 1. と同様 $(t, 0, 0)$ なのでそこから $x = 1$ の平面までの距離は $(t - 1)$
その範囲の三角錘は 1. と同様直交する辺の長さが $(t - 1)$ の直角二等辺三角形を底面とする高さ $(t - 1)$ の三角錘なので A を底辺とする三角錘の体積は $\dfrac{1}{3}(t - 1)^3$
$(1, 0, 0)$ から底面までの距離は $\dfrac{(t - 1)}{\sqrt{3}}$ なので
三角形の面積を S_x とすると $S_x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(t - 1)^2$
よって面積 $S(t) = T(t) - 3S_x = T(t) - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(t - 1)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(t - 1)^2$
$2 < t < 3$ の範囲では C の切口を反転させたものとおなじになる。
よって $S(t) = T(3 - t)$

以上より $0 < t < 1$ の範囲では t は単調増加なので $S(1)$ が最大
$2 < t < 3$ の範囲では t は単調減少なので $S(2)$ が最大
$S(1), S(2)$ を含めた範囲 $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲の最大値が $S(t)$ の最大値
この範囲では

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}(t-1)^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}(t^2 - 3(t-1)^2) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}(-2t^2 + 6t - 3)
\end{aligned}
$$

$f(t) = -2t^2 + 6t - 3$ とすると
$f'(t) = -4t + 6$
となり $f(t)$ は上に凸な 2 次方程式なので $t = \dfrac{3}{2}$ の点で最大となる。
よって $S(t)$ の最大値は

$$S(\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

証明終了