京都大学　1982 年　入学試験　文系数学　問題 4

問題

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ および $b \neq 0$ をみたす行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，次のこと示せ.

1. 一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ において，点 $\mathrm{P}(x, y)$ とその像 $\mathrm{Q}(x', y')$ を結ぶ線分の中点は，原点を通る定直線 l 上にある.
2. (1) において，線分 PQ がつねに定直線 l と垂直であるための必要十分条件は，$b = c$ である.

解答

1.
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より
$x' = ax + by, y' = cx + dy$
また $A^2 = E$ より
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= 1 \\ ab + bd &= 0 \\ ac + cd &= 0 \\ bc + d^2 &= 1 \end{aligned}$$

$b(a + d) = 0$ から $b \neq 0$ より

$a + d = 0$

つまり $a = -d$

P,Q の中点の座標 C は $(\dfrac{x + x'}{2}, \dfrac{y + y'}{2})$

$\dfrac{x + x'}{2} = \dfrac{(1 + a)x + by}{2}$

$\dfrac{y + y'}{2} = \dfrac{cx + (1 + d)y}{2} = \dfrac{cx + (1 - a)y}{2}$

よって

C$= (\dfrac{(1 + a)x + by}{2}, \dfrac{cx + (1 + a)y}{2})$

C$= (x_c, y_c)$ とすると

$bc = 1 - a^2$

$a^2 = 1 - bc$ より

$2by_c = bcx + b(1 - a)y = (1 - a^2)x + b(1 - a)y = (1 - a)((1 + a)x + by) = (1 + a)(2x_c)$

$b \neq 0$ より

$y_c = \dfrac{(1 - a)}{b} x_c$

となり x, y の値に関係なく $y = \dfrac{(1 - a)}{b} x$ の線上にある。

この直線は原点を通るので l の条件を満たしている。

したがって中点は定直線 l 上にある

2.

PQ のベクトルは $(x - x', y - y')$

線分 l と平行なベクトルは $(b, 1-a)$
この二つのベクトルが直交するためには内積が 0 であればよい
$x - x' = x - ax - by$,$y - y' = y - cx - dy$
よって内積は $b(x - ax - by) + (y - cx - dy)(1 - a) = (ac - c - ab + b)x + (ad - d - b^2 - a + 1)y$
これが任意の x, y について成立するためには $ac - c - ab + b = 0$ かつ $ad - d - b^2 - a + 1 = 0$

$$\begin{aligned}
ac - c - ab + b &= 0 \\
(a-1)c - b(a-1) &= 0 \\
(a-1)(c-b) &= 0 \\
ad - d - b^2 - a + 1 &= 0 \\
d(a-1) - (a-1) - b^2 &= 0 \\
(a-1)(d-1) - b^2 &= 0 \\
(a-1)(d-1) &= b^2
\end{aligned}$$

$b \neq 0$ より $a - 1 \neq 0$
$d - 1 \neq 0$
よってこの条件を満たすには $b - c = 0$ でなければならない
よって $b = c$
また逆にこのとき
$(a-1)(b-c) = 0$ は自明
$ad - d - b^2 - a + 1 = -a^2 + a - bc - a + 1 = -a^2 - bc + 1 = 0$ となり内積は 0
よって二つのベクトルは直交する。
以上より PQ と l が垂直に交わるためには、$b = c$ が必要十分である。
証明終了