京都大学　1982 年　入学試験　文系数学　問題 5

問題

平面上に四辺形 ABCD があって，どの頂点も，残りの頂点の作る三角形の外部にある．△BCD の重心を A_1，△CDA の重心を B_1，△DAB の重心を C_1，△ABC の重心を D_1 として，四辺形 $A_1B_1C_1D_1$ を作る．

1. 線分 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 は 1 点 P を共有する．
2. (1) において，点 P は各線分をどのような比に分けるか．

解答

どの頂点も他の三角形の内部に無いから、各三角形の重心 X_1 は四辺形の内部にある。
適当な点 O をとって O から ABCD へのベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ とする。
また A_1, B_1, C_1, D_1 へのベクトルを $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{d_1}$ とする。

$$\overrightarrow{a_1} = \frac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{3}$$
$$\overrightarrow{b_1} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{3}$$
$$\overrightarrow{c_1} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{d}}{3}$$
$$\overrightarrow{d_1} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}$$

線分 AA_1 は $p\overrightarrow{a} + (1-p)\overrightarrow{a_1}$ で表せる。
同様に線分 BB_1 は $q\overrightarrow{b} + (1-q)\overrightarrow{b_1}$
線分 CC_1 は $r\overrightarrow{c} + (1-r)\overrightarrow{c_1}$
線分 DD_1 は $s\overrightarrow{d} + (1-s)\overrightarrow{d_1}$
と表せる。
したがってそれぞれの線分は $p\overrightarrow{a} + \frac{1-p}{3}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d})$ $q\overrightarrow{b} + \frac{1-q}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d})$ $r\overrightarrow{c} + \frac{1-r}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{d})$
$s\overrightarrow{d} + \frac{1-s}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ と表せるので
$q = q = r = s = \frac{1}{4}$ とすると
すべて $\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{b} + \frac{1}{4}\overrightarrow{c} + \frac{1}{4}\overrightarrow{d}$
となって同一のベクトルとなる。
したがってこの終点を P とすると同一の点 P を共有する。
2.
上記より点 P はそれぞれの線分を $1:3$ に分割する。

証明終了